Ohjeita uudelle matematiikan opiskelijalle

Heikki Pitkänen

2009

Esipuhe

Tämä edessäsi oleva kokoelma muistiinpanoja on tarkoitettu uusien matematiikan opiskelijoiden tueksi. Kahteen ensimmäiseen kappaleeseen olen koonnut yleisiä ohjeita matematiikan opiskeluun. Jälkimmäisissä kappaleissa olen selvittänyt tärkeimpien peruskurssien pääpiirteitä ja tehnyt muutamia esimerkkitehtäviä.

Aloitin itse matematiikan opiskelun Jyväskylän yliopistossa vuonna 2006. Helpohkolta tuntuneen Johdatus matematiikkaan -kurssin jälkeen tuli kulttuurishokki Analyysi 1 ja Lineaarinen algebra ja geometria 1 -kurssien muodossa. Harjoitustehtävät tuntuivat käsittämättömiltä ja luennoilla istuminen ja muistiinpanojen raapustaminen turhalta. Jotta mahdollisuutesi välttyä myös omassa mielessäni käyneiltä alanvaihtoajatuksilta olisivat paremmat ja mielenkiintosi matematiikkaan säilyisi, olen koonnut muutamia neuvoja näille sivuille.

Tämän oppaan kirjoittaminen lähti aluille vapaa-ajan projektistani kesällä 2008, mutta on nyt kasvanut miltei kolmikymmensivuiseksi. Se on kuitenkin vain pelkkä pintaraapaisu yliopistossamme opetettavasta matematiikasta. Toivon sinulle antoisia lukuhetkiä ja menestystä opinnoissasi. Toivoisin, että lähettäisit palautetta tämän kokoelman sisällöstä ja erityisesti, onko siitä ollut apua opinnoissasi osoitteeseen: *hejupitk@jyu.fi*

Jyväskylässä 2009, Heikki Pitkänen

Kiitokset

Tämä opas ei olisi valmistunut lopulliseen muotoonsa ilman syksyllä 2008 aloittaneiden opiskelijoiden kannustavaa palautetta ja pientä painostusta varsinkin lineaarista algebraa käsittelevän kappaleen valmistumisen suhteen. Kiitoksen ja hatunnoston ansaitsevat myös ne vanhemmat opiskelijat, jotka ovat jaksaneet lukea keskeneräisiä vedoksiani ja ovat kannustaneet jatkamaan. Erityiskiitokset Jarkko Laaksoselle LaTeX-tuesta ja Piritta Ylöstalolle pilkunviilauksesta.

Sisältö

1 Matematiikan opiskelusta

"Lukiossa opetettiin laskentoa, yliopistossa opetetaan matematiikkaa." Huomannet, että suurin osa harjoitus- eli demotehtävistä alkaa sanalla todista, näytä tai osoita. Enää tehtävän vastaukseksi ei välttämättä riitä pelkkä luku, vaan useimmat tehtävänannot vaativat kokonaista *todistusta*.

Todistuksen tekeminen vaatii erilaista matemaattista ajattelua kuin mihin olet ehkä lukiossa oppinut. Todistus on loogisesti ehjä ja seurattavissa oleva perustelu, jossa tulee selvästi ilmi kuinka väite seuraa *oletuksista*. Oletukset annetaan joko väitteessä tai niiden oletetaan pätevän koko kurssin ajan, ns. *aksioomat*. Todistus ei ole siis puhdasta laskemista. Usein todistukseksi kelpaa myös sanallinen perustelu, jossa ei tarvitse olla yhtään numeroa. Pelkkä kuva sen sijaan ei riitä juuri koskaan perusteluiksi.

Matematiikan opiskelu on sikäli helppoa, ettei tarvitse muistaa paljon. Tärkeintä on muistaa *määritelmät*. Kun määritelmät muistaa, on helppo opetella ja ymmärtää tärkeimmät todistukset. Kun lukee ja varsinkin kun itse tekee todistuksia, oma todistustekniikka kehittyy. Matematiikkaa oppiikin parhaiten tekemällä demoja. Ja vaikket olisi tehnyt tehtäviä, älä jätä käymättä demoissa!

Osa demotehtävistä ja varsinkin ohjaustehtävistä voi tuntua itsestäänselviltä ja varsin tyhmiltä. Näiden tehtävien tekeminen on kuitenkin hyödyllistä, sillä ne ohjaavat ajatteluasi matemaattiseen suuntaan. Useat vanhemmat opiskelijat sanovat jopa, että usein selvästi tosilta näyttävät väitteet ovat vaikeimpia todistaa. Ohjaustehtävistä saa myös apua itse demojen tekemiseen, ja vaikka ei ehtisi käymään ohjauksissa, kannattaa ohjaustehtävät käydä läpi mielessä.

Muutamilla kursseilla, kuten Analyysi 1 & 2, on myös laskuryhmä, josta aiemmin käytettiin nimitystä "klinikka." Laskuryhmä poikkeaa normaalista ohjausryhmästä siinä, että klinikalla käsitellään ohjaustehtävien sijaan seuraavia demoja. Lisäksi laskuryhmässä on useampia ohjaajia, joten mahdollisuus saada henkilökohtaista ohjausta on parempi. Klinikkaan osallistuminen ei tarkoita, että olisit muita tyhmempi tai mitään vastaavaa, vaan siellä käyvät aivan normaalit opiskelijat. Laskuryhmässä on hyvää aikaa keskittyä rauhassa demojen tekemiseen ja tarvittaessa apu on lähellä.

Demojen tekeminen on mukavaa yhdessä. Yleensä muutaman hengen porukkaan mahtuu ainakin yksi, joka on sisäistänyt luennolla käsitellyn asian ja mielellään selittää sen toisille. Uuteen kaupunkiin yksin muuttaneen opiskelijan voi olla aluksi vaikea löytää samanhenkistä ryhmää. Tällöin kannattaa kysyä neuvoa reippaasti omalta tutorilta, Ynnän opiskelijatilasta tai muilta vanhemmilta opiskelijoilta.

Usein ongelma ratkeaa, kun sitä yrittää selittää toiselle. Professoreitakaan ei tarvitse pelätä, ja useimmat heistä vastailevat kysymyksiin mielellään myös virallisen vastaanottoajan ulkopuolella. Jos ongelmaan ei tahdo löytyä ratkaisua, ei kannata jäädä hakkaamaan päätä seinään, vaan antaa alitajunnan tehdä töitä. Hyviin yöuniin panostaminen on kannattavaa.

Tiivistettynä voisi sanoa: **Opettele määritelmät ja käy demoissa!**

2 Matemaattinen ongelmanratkaisu

Lukuvuonna 2009-2010 ei opinto-oppaan mukaan järjestetä Matemaattinen ongelmanratkaisu -kurssia. Kurssi on suunnattu toisen vuoden opiskelijoille, mutta mielestäni se sopisi käytäväksi opintojen alkuvaiheessa.

Seuraavaan olen koonnut muutamia kurssilta mieleen jääneitä neuvoja matemaattisten ongelmien ratkaisuun. Periaatteet soveltuvat erityisesti geometrisiin konstruktioihin, mutta niitä voi soveltaa myös yleisiin todistuksiin:

1. Tee heti alussa itsellesi selväksi mitkä ovat ongelman/tehtävän oletukset ja mikä väite tai väitteet.

2. Merkitse muistiin:

   i Mitä on annettu (A). Mitkä ovat väitteen/tehtävän oletukset?

   ii Mitä halutaan (H)... Siis lopputulos/vastaus (todistus)

   iii ...ja millä ehdoilla (E). Mitä rajoituksia vastauksella on?

3. Piirrä kuva! Merkitse kuvaan annetut ja tuntemattomat. Kuva ei yleensä riitä perusteluksi, mutta se auttaa hahmottamaan tilannetta.

4. Voitko ratkaista ongelman suoralla päättelyllä? Entä käänteisessä järjestyksessä lähtemällä lopputuloksesta? Tai ehkä lähtemällä oletuksista ja "tulemalla vastaan" lopputuloksesta solmien päättelytketjut jossain vaiheessa yhteen.[1]

5. Osaatko ratkaista helpotetun ongelman? Saatko ongelman ratkaistua, jos jätät ehtoja huomioimatta? Entä lisäämällä oletuksia? Ovatko kaikki oletukset tarpeellisia?

6. Oletko nähnyt samanlaista ongelmaa? Voitko soveltaa aiemmin opittua keinoa tai erityisesti aiemmin todistettua lausetta ongelman ratkaisemiseksi? Ehkä olet ratkaissut ongelman eri muodossa.

[1] Vertaa esimerkiksi derivaatan ja integraalin ratkaisua.

7. Kun olet saanut ongelmat ratkaistua, käy läpi kaikki vaiheet. Ovatko ne varmasti pitäviä? Tämä on niin sanottu ”jälkipeli.” Mieti, olisitko voinut ratkaista ongelman toisin. Mitä oletuksia käytettiin, mitkä olivat turhia? Mihin voisit käyttää oppimaasi?

Suosittelen tutustumista kurssin kirjallisuuteen: Lakatos: Proofs and Refutations - the Logic of Mathematical Discovery, Polya: How to Solve it - A New Aspect of Mathematical Method, Polya: Mathematical Discovery - On Understanding, Learning and Teaching Problem Solving. Näistä viimeistä voi suositella varsinkin matematiikan opettajiksi aikovalle. Kaikki kolme löytyvät myös Mattilanniemen kirjastosta.

3 Peruskursseista

3.1 Johdatus matematiikkaan

Johdatus matematiikkaan -kurssin sisältö vaihtelee hieman riippuen luennoitsijasta. Opinto-oppaan mukaan kurssi käsittelee lukiossa opittua yliopistomatematiikan kannalta. Lähinnä kurssilla opetellaan matematiikan perusasioita kuten matemaattisia merkintöjä, todistamisen perustekniikoita, logiikkaa ja joukko-oppia. Käänteinen todistus ja väitteen loogisen negaation muodostaminen ovat tärkeitä kurssilla opittavista asioista. Olen huomannut, että erityisesti käänteisen todistuksen idea voi olla tuntematon vielä useamman kuukauden opiskelleille, joten otan sen nyt tarkasteluun:

3.1.1 Käänteinen todistus

Käänteistä todistusta käytetään, kun suora todistus on käytännössä mahdoton tehdä esimerkiksi äärettömän monen eri mahdollisuuden takia (yksikäsitteisyystodistukset tehdään usein käänteisesti). Loogisesti idea on seuraava: Olkoon A oletukset ja B väite. Halutaan, että $A \Rightarrow B$. Merkintää ”$\Rightarrow$” käytetään kuvaamaan matemaattisesti pitävää päättelyä. Logiikan sääntöjen mukaan todesta voi seurata vain totta, joten tehdään väitteen B looginen negaatio, $\neg B$ ja väitetäänkin, että se seuraa oletuksista. Seuraavaksi osoitetaan, että $\neg B$:stä seuraa ristiriita jonkin oletuksen[2] kanssa. Merkitään tätä ristiriitaista tulosta C. Nyt:

$$A \Rightarrow \neg B \Rightarrow C \text{ joten } A \Rightarrow C$$

[2]Tehtävänannossa ei välttämättä lue kaikkia oletuksia, joiden voidaan kuvitella kuuluvan oletuksiin A. Esimerkiksi $1 = 0$ on ristiriitainen tulos jo pelkän terveen järjen perusteella.

Koska C on epätosi ja todesta ei voi seurata epätotta, myös $\neg B$ on oltava epätosi. Tällöin B on tosi ja joten $A \Rightarrow B$. Katso esimerkit käänteisestä todistuksesta sivuilla 11 ja 18.

Koska kurssi on pakollinen pääaineopiskelijoille, oletan lukijan hallitsevan sen sisällön enkä käsittele sitä tässä tarkemmin.

3.2 Analyysi 1

Analyysi 1 -kurssi lukeutuu yhteen tärkeimmistä peruskursseista. Kurssilla tutkitaan reaalilukuja, funktioiden ominaisuuksia joista erityisesti jatkuvuutta, jonoja ja niiden suppenemista ja raja-arvoa. Seuraavissa esimerkeissä keskityn erityisesti erikoiseen epsilon-käsitteeseen ja jatkuvuuteen. Näiden esimerkkien tarkoitus ei ole korvata luennoilla käymistä tai muun opintomateriaalin lukemista, vaan toimia tukena niissä aiheissa, jotka itse koin vaikeimmiksi. Suosittelen Tero Kilpeläisen Analyysi 1 -monisteen [4] lukemista kurssin aikana.

3.2.1 Muuttujista

Todistukset halutaan tehdä niin, että ne pätevät kaikissa tapauksissa, jotka toteuttavat oletukset. Tämän takia on tärkeää ymmärtää, mitä oletuksilla tarkoitetaan, mitkä luvut ovat muuttujia ja mitä lisäoletuksia voidaan tehdä. Ei tarvitse säikähtää kummallisen näköisiä kreikkalaisia kirjaimia.

Esimerkki

Olkoon $x, y \in \mathbb{R}$. Nyt x ja y on kiinnitetty ja on tasan kolme mahdollista tilannetta:

1. $x > y$
2. $x < y$ tai
3. $x = y$

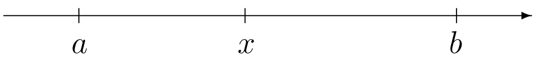
Ellei luvuista x ja y anneta muita oletuksia, on niitä koskevan väitteen todistus jaettava kolmeen osaan. Tällöin otetaan apuoletukseksi ensin esimerkiksi $x > y$ ja katsotaan pitääkö väite paikkansa tällöin. Jos väite ei päde jollakin näistä kolmesta apuoletuksesta, väite on epätosi.

Esimerkki

Oletetaan, että $x \in]a, b[$. Osoita, että on olemassa $\varepsilon > 0$ siten, että

$$[x-\varepsilon, x+\varepsilon] \subset]a, b[$$

Todistus:
Annettu: x, a, b siten, että $x \in]a, b[$ tai siis $a < x < b$ (määritelmä!). Nämä luvut ovat annettuja eivätkä siis muutu enää.
Halutaan: ε
Ehdot: $\varepsilon > 0$ ja $[x-\varepsilon, x+\varepsilon] \subset]a, b[$ ts. $x - \varepsilon > a$ ja $x + \varepsilon < b$
Piirretään kuva:



Kuvasta huomataan, että on kolme mahdollista tilannetta: Joko x on lähempänä lukua a tai lukua b tai x on keskellä väliä. Tehdään siis todistus kahdessa osassa, joista ensimmäinen kattaa ensimmäisen ja viimeisen tilanteen:

1: Jos x on lähempänä lukua a tai keskellä, $x - a \leq b - x$. Valitaan $\varepsilon = \frac{x-a}{2} > 0$. Siis ε on puolet a:n ja x:n etäisyydestä. Tällöin:

$$x - \varepsilon = x - \frac{(x-a)}{2} = \frac{2x-(x-a)}{2} = \frac{x}{2} + \frac{a}{2} > a, \text{ sillä } x > a$$

ja

$$x+\varepsilon = x+\frac{(x-a)}{2} \leq \frac{2x+(b-x)}{2} \leq \frac{x}{2}+\frac{b}{2} < b, \text{ sillä } x-a \leq b-x \text{ ja } x < b$$

joten $[x-\varepsilon, x+\varepsilon] \subset]a, b[$ ja $\varepsilon > 0$. Valittu epsilon on siis sopiva.

2: Jos x on lähempänä lukua b, $x - a > b - x$. Valitaan $\varepsilon = \frac{b-x}{2} > 0$ Tällöin todistus etenee samalla tavalla kuin kohdassa 1. Jätän todistuksen tarkan loppuunviemisen ja jälkipelin lukijan tehtäväksi. $\square$

Edellisessä esimerkissä x, a ja b oli siis kiinnitetty, vaikka niiden suuruutta ei tiedetä, vain suuruusjärjestys. Todistus tehtiinkin siten, että se pätee kaikilla x:n, a:n ja b:n arvoilla joille pätee: $a < x < b$. Huomaa, että epsilon voidaan valita useammalla tavalla, kunhan se määritellään annettujen lukujen avulla.

Jotta todistus olisi mahdollisimman helppo ymmärtää, on yhtälöitä syytä perustella. Tämä on parasta tehdä merkitsemällä yhtäsuuruusmerkin yläpuolelle, jos on käytetty jotain oletuksista tai lausetta, tai viimeistään yhtälön perään kuten esimerkissä. Näin todistus on helppo lukea vielä useankin vuoden päästä.

3.2.2 Kurssin perusoletus

Kurssin perusoletukseksi otetaan joko *sisäkkäisten välien periaate* tai *täydellisyysaksiooma*. Nämä ovat ekvivalentteja eli toisen voi todistaa toisen avulla. Yleensä kuitenkin valitaan näistä ensimmäinen, sillä se on aluksi helpompi ymmärtää.

Aksiooma

Jos $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \ldots \supset I_k \supset I_{k+1}$ on jono sisäkkäisiä suljettuja välejä, niin

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} I_k \neq \emptyset$$

ts. on olemassa $y \in \mathbb{R}$ s.e $y \in I_k$ kaikilla $k = 1, 2 \ldots$

Tästä seuraa, että rationaali- ja irrationaaliluvut ovat "tiheässä" reaalilukujen joukossa. Siis kahden reaaliluvun välistä löytyy ääretön määrä rationaali- ja irrationaalilukuja.

Esimerkki

Oletetaan, että on $x \in \mathbb{R}$ s.e. $0 \leq x < \varepsilon$ kaikilla $\varepsilon > 0$. Osoita, että $x = 0$

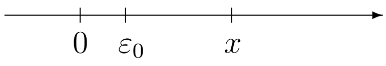
Todistus: Tehdään käänteinen todistus eli oletetaan, että väite on epätosi ja osoitetaan, että siitä seuraa ristiriita oletusten kanssa. Muodostetaan antiteesi: $x \neq 0$, siis $x > 0$ TAI $x < 0$.
Väite $x < 0$ voidaan unohtaa suoraan oletuksen perusteella. Tutkitaan siis toista väitettä $x > 0$. Todistaaksemme väitteen riittää löytää yksi reaaliluku, jolla antiteesi ei päde. Tälläinen luku löytyy, koska aksiooman mukaan kahden reaaliluvun välissä on aina ääretön määrä reaalilukuja. Siis on olemassa ainakin yksi reaaliluku, merkitäään sitä ε_0, siten, että $0 < \varepsilon_0 < x$. Tämä on ristiriidassa oletuksen $0 \leq x < \varepsilon$ kaikilla $\varepsilon > 0$ kanssa, sillä nyt $\varepsilon_0 > 0$ ja antiteesin piti päteä kaikilla $\varepsilon > 0$. Täten antiteesi on epätosi ja väite tosi.

□

Kuvan piirtäminen auttaa ymmärtämään todistusta:

Väite:

Antiteesi ja ristiriita:



3.2.3 Mikä ihmeen epsilon?

Kurssilla tulevat määritelmät jatkuvuudelle, funktion raja-arvolle ja jonon suppenemiselle tehdään käyttäen epsilonia. Epsilon on vakiintunut merkintä. Erään luennoitsijan mukaan se voitaisiin korvata hevosen päällä, mutta sen piirtäminen useaan kertaan todistuksessa olisi turhan työlästä. Epsilonilla merkitään yleensä sellaista positiivista reaalilukua, jota pienemmäksi funktion arvojen erotuksia, funktion arvoa, jonon alkioita tai jonon alkioiden erotuksia halutaan arvioida. Voitaisiin sanoa, että epsilon on ”hyvin pieni” positiivinen luku tai ”nollasta seuraava” reaaliluku[3].

Kuten edellisessä esimerkissä havaittiin, x:n määritteleminen epsilonin avulla johtaa siihen, että epsilon ”pakottaa” x:n menemään täsmälleen nollaan. Tällainen ominaisuus on toivottu esimerkiksi, kun määritellään raja-arvoa: Raja-arvon määritteleminen epsilonin kautta pakottaa raja-arvon yhdeksi luvuksi. Jatkuvuuden määrittely epsilonin kautta taas pakottaa funktion $f(x)$ arvot pisteen x_0 pienessä *lähiympäristössä* lähestymään äärettömän lähelle arvoa $f(x_0)$, mikä intuitiivisestikin tuntuu järkevältä määritelmältä.

3.2.4 Supremum ja infimum

Edellisen esimerkin kaltaista käänteistä todistusta käytetään useissa *supremum*- ja *infimum*-todistuksissa. Supremum on joukon pienin yläraja ja infimum joukon suurin alaraja. Joukon A infimumista käytetään merkintää inf A ja supremumista *sup* A. Infimum ja supremum sekä ala- ja yläraja määritelmineen käsitellään tarkemmin kurssilla.

Todistus etenee yleensä pääpiirteittäin näin:
On annettu joukko ja väittenä on, että infimum/supremum on jokin luku, merkitään sitä tässä R:llä.

1. Osoitetaan, että R on alaraja/yläraja.

[3] Huomaa kuitenkin, että tällaisen ”nollasta seuraavan” reaaliluvun olemassaolo on edellisen esimerkin mukaan mahdotonta.

2. Muodostetaan väitteen vastaväite: On olemassa ala-/yläraja, joka on suurempi/pienempi kuin R, merkitään sitä N:llä.

3. Osoitetaan, että joukosta löytyy pienempi/suurempi alkio kuin N, jolloin N ei voi olla ala-/yläraja.

Huomaa, että todistuksessa todistetaan ensin, että M on ala-/yläraja (1.) ja sitten käänteisellä todistuksella, että M on suurin/pienin mahdollinen (2. ja 3.).

Esimerkki

Olkoon $A = \{\frac{1}{n} \ : n \in \mathbb{N}\}$. Osoita, että $infA = 0$

1. 0 on alaraja, koska kaikilla $n \in \mathbb{N}$ $\frac{1}{n} > 0$

2. Vastaväite: $infA = N > 0$.

3. Olkoon M seuraava N^{-1}:stä suurempi kokonaisluku. Siis $M > \frac{1}{N}$ ja $M \in \mathbb{N}$, jolloin $\frac{1}{M} < N$ ja $\frac{1}{M} \in A$. N ei siis ole alaraja.

□

Huomaa, että M voidaan valita usealla tavalla. Kuitenkaan ei voida valita $M = N^{-1} + 1$, koska N^{-1} ei välttämättä ole kokonaisluku - voisihan inf A olla irrationaalinen!

3.2.5 Arvioiminen

Vaikka matematiikkaa pidetään yhtenä eksakteimmista tieteistä, useissa analyysin tehtävissä ei haluta välttämättä tarkkaa tietoa funktion arvosta tietyssä pisteessä, vaan riittää, että arvoa arvioidaan ylöspäin. Arvioinnilla on suuri merkitys useissa jatkuvuustodistuksissa. Erityisen tärkeää kurssilla on muistaa muutama ehkä jo entuudesta tuttu relaatio:

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) \tag{1}$$

$$0 \leq (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \tag{2}$$

ja etenkin kolmioepäyhtälöt:

$$|a+b| \leq |a| + |b| \qquad \text{ja} \qquad ||a| - |b|| \leq |a+b| \tag{3}$$

Ei hätää, jos et tunne kahta viimeistä. Kolmioepäyhtälöt käsitellään kurssilla perinpohjaisesti.

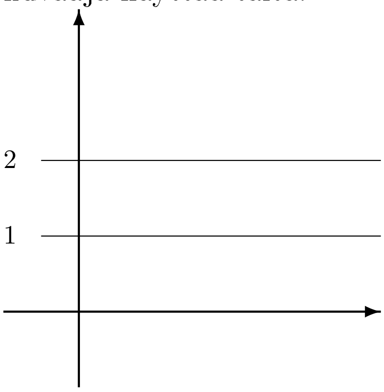
Analyysi 1 -kurssilla käsitellään tarkasti alkeisfunktioita ja funktioiden perusominaisuuksia kuten injektiivisyyttä ja surjektiivisuutta. Jätän näiden käsittelyn kurssille ja siirryn suoraan kurssin yhteen tärkeimmistä aiheista eli jatkuvuuteen.

3.2.6 Jatkuvuus

Lukiossa jatkuvuutta tutkittiin usein funktion kuvaajasta. Jatkuvuuden päättely tällä tavalla ei ole kuitenkaan luotettavaa. Tutkitaan esimerkkifunktiota:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{kun } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{kun } x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \end{cases}$$

Koska rationaali- ja irrationaaliluvut ovat tiheässä reaalilukujen joukossa, kuvaaja näyttää tältä:



Funktion kuvaaja näyttäisi kahdelta jatkuvalta suoralta, mutta samalla se saa jokaisella mahdollisella välillä kahta eri arvoa. Sillä on siis äärettömästi "hyppäysepäjatkuvuuspisteitä". Yliopistossa jatkuvuus määritelläänkin uudella tavalla. Motivaationa suosittelen lukemaan sivut 16-18 lähteestä [6].

Määritelmä

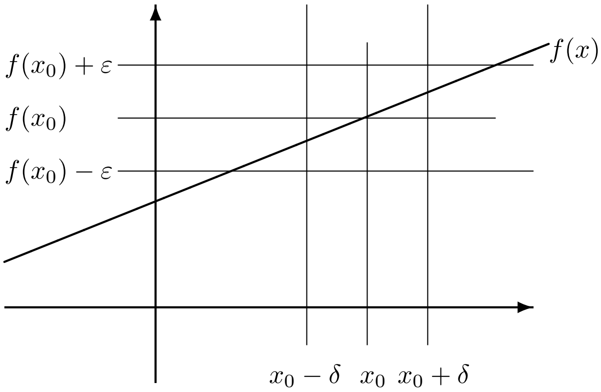
Olkoon $I \subset \mathbb{R}$ väli ja $f : I \to \mathbb{R}$ kuvaus. f on jatkuva pisteessä $x_0 \in I$, jos kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$, siten että

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

kun $|x - x_0| < \delta$.

Tämä tarkoittaa siis sitä, että jokaiselle **annetulle** luvulle ε ja x_0 löydetään luvun δ levyinen väli, jolla funktion arvot vaihtelevat vähemmän kuin ε. Tarkemmin ilmaistuna, jokaiselle $\varepsilon > 0$ löydetään $\delta > 0$ siten, että väli $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ kuvautuu välin $]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[$ osajoukoksi:

$$f(]x_o - \delta, x_o + \delta[) \subset]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[$$



Yksinkertainen esimerkki

Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$. Osoita, että f on jatkuva pisteessä 0.

Todistus: Olkoon $\varepsilon > 0$.[4] Tälle ε:lle ja annetulle pisteelle $x_0 = 0$ tulisi löytää sopiva δ siten, että

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - f(0)| = |x - 0| = |x| < \varepsilon$$

kun $|x - x_0| = |x - 0| = |x| < \delta$. Huomataan, että deltaksi voidaan valita annettu epsilon. Tällöin:

$$\varepsilon = \delta > |0 - x| = |f(0) - f(x)|$$

siis $|f(x) - f(0)| < \varepsilon$ kuten haluttiinkin. $\square$

Monimutkaisempi esimerkki

Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Osoita, että f on jatkuva pisteessä 0.

Todistus: Olkoon $\varepsilon > 0$. Koska halutaan tutkia funktiota pisteen $x_0 = 0$ lähiympäristössä, voidaan olettaa, että $\varepsilon < 1$.
Tutkitaan erotusta $|f(x) - f(0)|$:

$$|f(x) - f(0)| = |f(x)| = |x^2| = |x \cdot x| = |x| \cdot |x| < 1 \cdot |x| = |x| = |x - 0|$$

kun $|x| < 1$. Huomataan, että deltaksi voidaan valita jälleen annettu epsilon, jolloin:

$$|f(x) - f(0)| < |x - 0| = \delta = \varepsilon$$

Tämä edellyttää kuitenkin edellä mainittua lisäoletusta, $\varepsilon < 1$, jolloin $\delta < 1$. Tällaisen oletuksen tekeminen on sallittua, sillä jos olisi $\varepsilon \geq 1$, voitaisin valita $\delta = 1$. $\square$

[4] Tässä kiinnitetään epsilon. Jatkuvuustodistukset alkavat miltei aina näin.

Monimutkainen esimerkki

Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Osoita, että f on jatkuva pisteessä 2.

Todistus: Olkoon $\varepsilon > 0$. Kuten edellisessä esimerkissä, voidaan olettaa, että $\varepsilon < 1$. Tutkitaan erotusta $|f(x) - f(2)|$:

$$|f(x) - f(2)| = |x^2 - 4| = |(x-2)(x+2)| = |x-2||x+2|$$

”Lisäämällä nolla” itseisarvomerkkien väliin ja kolmioepäyhtälön avulla saadaan:

$$|x-2||x+2| = |x-2||x-2+4| \leq |x-2|\big(|x-2| + |4|\big) = |x-2|^2 + 4|x-2|$$

Nyt valitsemalla $\delta = \dfrac{\varepsilon}{5}$ ja olettaen, että $\varepsilon < 1$ saadaan:

$$|x-2| < \delta = \frac{\varepsilon}{5} < 1$$

jolloin:

$$|x-2|^2 + 4|x-2| < 1 \cdot |x-2| + 4|x-2| = 5|x-2| < 5\delta = 5 \cdot \frac{\varepsilon}{5} = \varepsilon$$

Siis: $|f(x) - f(2)| < \varepsilon$ kun $|x-2| < \delta = \dfrac{\varepsilon}{5}$ $\square$

Huomaa, kuinka esimerkissä käytettin kohdan 3.2.5 kaavoja kaksi kertaa, jotta erotus $|x-2|$ saadaan kaivettua esille. Näiden kaavojen merkitystä ei voi korostaa liikaa.

Kuvaus x^2 voidaan todistaa jatkuvaksi myös jokaisessa reaalipisteessä $x_0 \in \mathbb{R}$. Todistus etenee samalla tavalla kuin edellisessä esimerkissä, mutta alussa $f(2)$ tilalle sijoitetaan $f(x_0)$, jolloin päädytään valitsemaan $\delta = \dfrac{\varepsilon}{|2x_0| + 1}$.

Esimerkki epäjatkuvuustodistuksesta

Ennen jatkuvuuden tarkkaa määritelmää tutkittiin epäjatkuvan funktion kuvaajaa. Todistetaan tämä funktio nyt epäjatkuvaksi jokaisessa rationaalipisteessä:

Olkoon $x_0 \in \mathbb{Q}$. Osoitetaan, että kuvaus $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{kun } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{kun } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

on epäjatkuva pisteessä x_0.

Todistus: Tehdään antiteesi: f on jatkuva pisteessä x_0. Epäjatkuvuuden todistamiseksi riittää löytää yksi epsilon, jolla väite[5] ei pidä paikkaansa. Olkoon siis $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Jos f olisi jatkuva, olisi olemassa $\delta > 0$ siten, että:

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon = \frac{1}{2}$$

kun $|x - x_0| < \delta$.
Kuitenkin kurssin perusoletuksen mukaan löydetään sellainen irrationaaliluku, $i \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, jolla $|i - x_0| < \delta$, mutta:

$$|f(i) - f(x_0)| = |1 - 2| = 1 > \frac{1}{2} = \varepsilon$$

Tämä on ristiriita, joten antiteesi on väärä ja alkuperäinen väite tosi. $\square$

Huomaa, että edellisessä todistuksesa käytettiin käänteistä todistusta ja etsittiin deltan sijaan sopiva epsilon. Esimerkin f voidaan todistaa samalla tavalla epäjatkuvaksi jokaisessa irrationaalipisteessä, mutta tämä jääköön lukijan tehtäväksi.

3.2.7 Jatkuvuuden jälkeen

Jatkuvuuden jälkeen kurssilla edetään jonoihin ja ääriarvoihin, joissa olennaisessa roolissa on edelleen epsilon. Näihin liittyvät todistukset ovat jatkuvuustodistusten kaltaisia, mutta deltan sijaan haetaan jonolle tarpeeksi suurta indeksiä tai funktiolle sopivaa x:n arvoa. Kuten jatkuvuuden yhteydessä, myös jono- ja ääriarvotarkasteluissa arvioinnilla on suuri merkitys. Mikäli lukija on sisäistänyt kurssilla tähän asti käsitellyt asiat, ei näiden todistusten tekeminen tuottane ongelmia.

3.3 Lineaarinen algebra ja geometria 1

Lineaarinen algebra ja geometria 1 -kurssi, lyhennetään usein LAG1, on sisällöltään sama kuin entinen Vektorit ja matriisit. Erikoisesta nimestään huolimatta kurssi käsittelee ”yksinkertaisia” lineaarisia yhtälöitä ja yhtälöryhmiä. Kurssilla tutustutaan aluksi äärellisulotteisten lineaariavaruuksien ominaisuuksiin, mistä hypäätään pian matriiseihin ja Gaussin-Jordanin yhtälöryhmien ratkaisumenetelmään. Tässä vaiheessa todennäköisyys jäädä kurssilla jälkeen on hyvin suuri.

[5] Kaikille $\varepsilon > 0$ löytyy $\delta > 0$...

3.3.1 Lineaariavaruus

Lineaariavaruus $\mathbb{R}^n$ on pisteistä $x = (x_1, \ldots, x_n)$ koostuva joukko, jossa on määritelty summa, kertominen reaaliluvulla ja nolla-alkio ja joka toteuttaa kahdeksan aksioomaa. Määritelmät ja aksioomat löytyvät kurssin monisteesta [5], joten niiden kertaaminen tässä on turhaa.

Esimerkki

Todistetaan yksi lineaariavaruuden $\mathbb{R}^n$ lause suoraan aksioomista: Jokaisella $x \in \mathbb{R}^n$ on täsmälleen yksi vasta-alkio $x' = (-1) \cdot x$.

Todistus: Tehdään käänteinen todistus: Oletetaan että alkiolla x on toinen vasta-alkio $y = (y_1, \ldots, y_n)$ ja että $y \neq (-1) \cdot x$. Todetaan, että tämä johtaa ristiriitaan.
Koska y on x:n vasta-alkio, niin aksiooman 4 mukaan:

$$x + y = \bar{0} \quad \text{eli} \quad (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) = (0, \ldots, 0)$$

tästä seuraa $x_i + y_i = 0$ kaikilla $i = 1, \ldots, n$ eli $y_i = -x_i$ kaikilla $i = 1, \ldots, n$, jolloin $y = (y_1, \ldots, y_n) = (-x_1, \ldots, -x_n)$. Reaaliluvulla kertomisen määritelmän mukaan $(-x_1, \ldots, -x_n) = (-1) \cdot (x_1, \ldots, x_n)$, joten

$$y = (y_1, \ldots, y_n) = (-x_1, \ldots, -x_n) = (-1) \cdot (x_1, \ldots, x_n) = (-1) \cdot x$$

Tämä on ristiriita, sillä oletettiin, että $y \neq (-1) \cdot x$. $\square$

Huomaa, että todistuksessa käytettiin yhtä aksioomaa, vektoreiden summan määritelmää ja reaalilukujen laskusääntöä. Vastaavanlaisella päättelyllä voidaan todistaa, että on olemassa täsmälleen yksi avaruuden $\mathbb{R}^n$ nolla-alkio: Oletetaan ensin, että on olemassa toinen nolla-alkio, $\bar{0}_2 \neq \bar{0} = (0, \ldots, 0)$, ja johdetaan tästä ristiriita käyttäen hyväksi nolla-alkiota koskevaa aksioomaa sekä vektoreiden ja reaalilukujen yhteenlaskua. Tarkka todistus jääköön lukijan tehtäväksi.

3.3.2 Normi

Normi on kuvaus $|| \cdot || : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, joka täyttää normille asetetut karakteristiset ominaisuudet. Nämä kolme ominaisuutta on lueteltu kurssimonisteessa, mutta niiden opettelu ulkoa tällä kurssilla on turhaa. Erilaisiin normien määritelmiin tutustutaan myöhemmin LAG2-kurssilla. Ellei muuta ole mainittu, oletuksena LAG1:ssä normina käytetään niin sanottua *euklidista normia*:

$$||x|| = \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Big)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

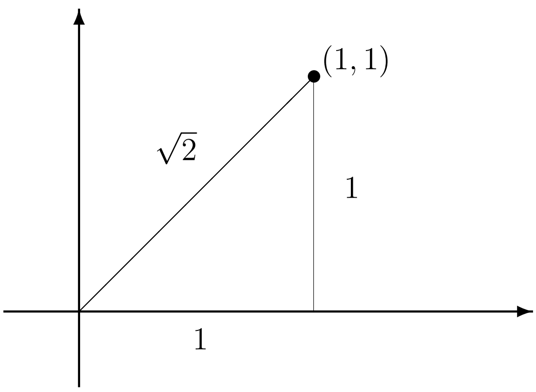
Normin geometrinen tulkinta on origosta pisteeseen $x = (x_1, \dots, x_n)$ piirretyn janan pituus eli pisteen x etäisyys origosta. Vektoria, jonka pituus on 1 sanotaan *yksikkövektoriksi*.

Huomaa, että normin määritelmästä seuraa: $||x||^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$

Normin $||x - y||$ geometrinen tulkinta on pisteiden x ja y etäisyys. (Vertaa itseisarvoon $|x - y|$ avaruudessa $\mathbb{R}$!)

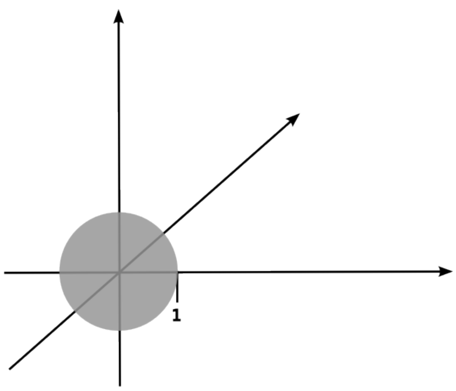
Esimerkki

$\mathbb{R}^2$ tapauksessa euklidinen normi saa Pythagoraan lausetta vastaavan muodon: Olkoon $x = (1, 1) \in \mathbb{R}^2$. Tällöin $c := ||x|| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$



Esimerkki

$\mathbb{R}^3$:n yksikkövektorit muodostavat pallopinnan $S(0, 1) = \{x \in \mathbb{R}^3 : ||x|| = 1\}$



Esimerkki

Osoitetaan, että kaikilla $x, y \in \mathbb{R}^n$ pätee ns. *suunnikasyhtälö:*

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2||x||^2 + 2||y||^2$$

Todistus: Olkoon $x, y \in \mathbb{R}^n$. Tällöin:

$$||x+y||^2 = \Big(\big(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^2\big)^{\frac{1}{2}}\Big)^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2x_iy_i + y_i^2$$

ja vastaavasti:

$$||x-y||^2 = \Big(\big(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^2\big)^{\frac{1}{2}}\Big)^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2x_iy_i + y_i^2$$

Kun nämä yhdistetään ja käytetään summan laskusääntöjä:

$$\begin{aligned} ||x+y||^2 + ||x-y||^2 &= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2x_iy_i + y_i^2 + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2x_iy_i + y_i^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + y_i^2 + x_i^2 + y_i^2 = \sum_{i=1}^{n} 2x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} 2y_i^2 = 2||x||^2 + 2||y||^2 \end{aligned}$$

$\square$

Lukijan tehtäväksi jää suunnikasyhtälön geometrinen tulkinta.

3.3.3 Aliavaruus

Lineaarisen avaruuden $\mathbb{R}^n$ osajoukkoa H sanotaan aliavaruudeksi, jos se toteuttaa seuraavat ehdot:

1. $x, y \in H \Rightarrow x + y \in H$
2. $x \in H$ ja $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda \cdot x \in \mathbb{R}$

Siis aliavaruuden H kaikki alkioiden summat ja kaikkien alkioiden reaalikerronnaiset kuuluvat aliavaruuteen H. Joukko $\{0\}$ (siis joukko joka sisältää vain yhden alkion, älä sekoita tyhjään joukkoon!) on triviaali aliavaruus, mikä lukijankin lienee helppo todeta itsenäisesti.

Esimerkki

Osoitetaan, että x-akseli $X = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = (t,0), t \in \mathbb{R}\}$ on tason $\mathbb{R}^2$ aliavaruus:

1. Olkoon $r = (r_1, 0) \in X$ ja $u = (u_1, 0) \in X$. Tällöin $r + u = (r_1 + u_1, 0)$. Koska $r, u \in X$ niin $r_1, u_1 \in \mathbb{R}$ ja $r_1 + u_1 \in \mathbb{R}$ joten $(r_1 + u_1, 0) \in X$

2. Olkoon $\lambda \in \mathbb{R}$ ja $p = (p_1, 0) \in X$. Nyt $\lambda \cdot p = \lambda \cdot (p_1, 0) = (\lambda \cdot p_1, 0)$. Koska $p \in X$ niin $p_1 \in \mathbb{R}$ ja tällöin $\lambda \cdot p_1 \in \mathbb{R}$ ja $\lambda \cdot p \in X$.

$\square$

Huomaa, että todistuksessa oletettiin tunnetuksi reaalilukujen laskusäännöt. Lukijan tehtäväksi jää osoittaa minkä tahansa origon kautta kulkeva suoran $K_{c \cdot x} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = c \cdot x_1,\ c \in \mathbb{R}\}$ olevan tason $\mathbb{R}^2$ aliavaruus. Miksi suora $K_{x+c} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = x_1 + c,\ c \neq 0\}$ ei ole aliavaruus?

3.3.4 Sisä- eli pistetulo

Sisä- eli pistetulo on kuvaus $(\cdot \,|\, \cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Kuten normille, myös sisätulolle on määritelty yleiset ominaisuudet. Näihin tutustutaan tarkemmin LAG2-kurssilla. LAG1-kurssilla käytetään euklidista sisätuloa:

$$x \cdot y = (x \,|\, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Jos $(x \,|\, y) = 0$ niin vektoreilla x ja y ei ole yhteisiä komponentteja, jolloin ne ovat kohtisuorassa toisiaan vasten. Tällöin sanotaan, että vektorit ovat *ortogonaalisia* ja merkitään $x \perp y$.

Normin ja pistetulon välillä on yhteys:

$$||x|| = \sqrt{(x \,|\, x)} \Leftrightarrow ||x||^2 = (x \,|\, x)$$

Yleisesti normi määritelläänkin juuri sisätulon avulla ja tällöin puhutaan niin sanotusta *sisätuloavaruudesta.*

Pistetulon määritelmästä

Tutkitaan pistetuloa kaksiulotteisessa tapauksessa: Olkoon vektorit $x, y \in \mathbb{R}^2$, α vektorin x ja x-akselin välinen kulma, β vektorin y ja x-akselin välinen kulma ja γ vektoreiden x ja y välinen kulma. Tällöin siis $\gamma = \beta - \alpha$.

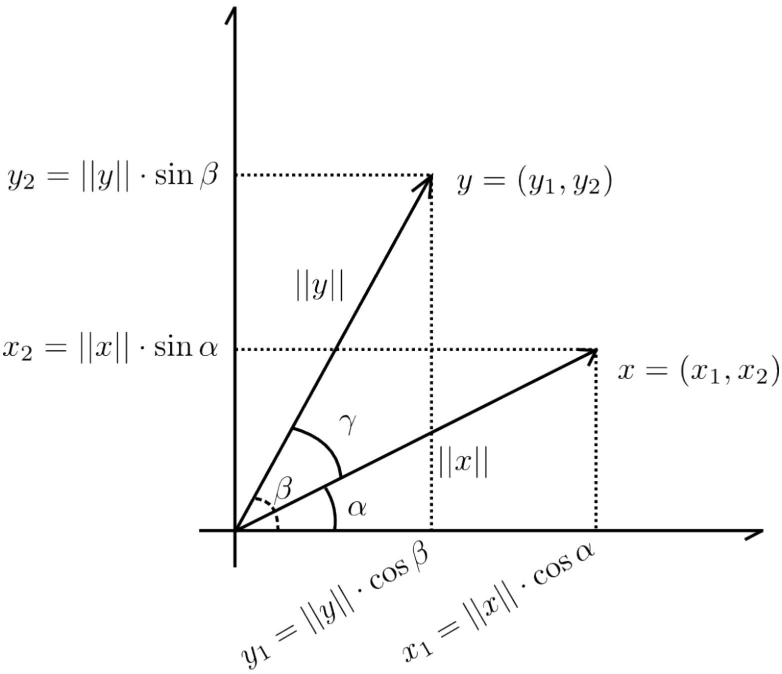
Tällöin:

$$x_1 = ||x|| \cdot \cos\alpha,\ x_2 = ||x|| \cdot \sin\alpha$$
$$y_1 = ||y|| \cdot \cos\beta,\ y_2 = ||y|| \cdot \sin\beta$$

Nyt pistetulo $(x|y)$ voidaan kirjoittaa uudestaan:

$$\begin{aligned}(x\,|\,y) = \sum_{i=1}^{2} x_i y_i &= ||x|| \cos\alpha \cdot ||y|| \cos\beta + ||x|| \sin\alpha \cdot ||y|| \cdot \sin\beta \\ &= ||x|| \cdot ||y|| (\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) \\ &= ||x|| \cdot ||y|| \cos\beta - \alpha \\ &= ||x|| \cdot ||y|| \cos\gamma\end{aligned}$$

Tämä yleistyy myös useampiulotteisiin avaruuksiin. Tällaisessa määritelmässä on järkeä, sillä varsinkin fysiikassa monet suureet lasketaan kahden vektorin ja niiden välisen kulman avulla. Esimerkiksi työ $W = ||F|| \cdot ||s|| \cdot \cos\alpha$.

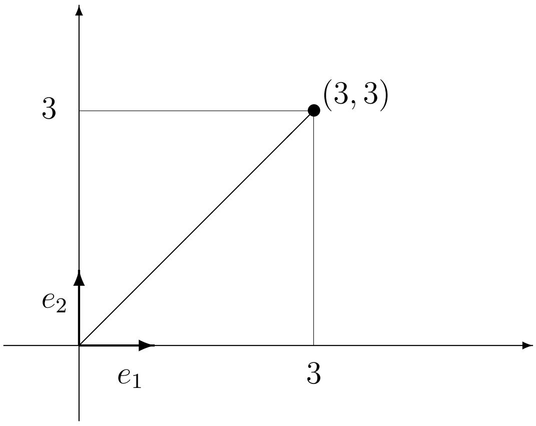


Esimerkki

Olkoon $(3,3) \in \mathbb{R}^2$ ja $e_1 = (1,0)$ ja $e_2 = (0,1)$ *luonnollisia kantavektoreita.* Tällöin:

$$(x\,|\,e_1) = 3 \cdot 1 + 3 \cdot 0 = 3$$
$$\text{ja } (x\,|\,e_2) = 3 \cdot 0 + 3 \cdot 1 = 3$$

Kuva selventänee tilannetta:



3.3.5 Lineaarikuvaus

Kuvaus $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ on lineaarinen, lyhyesti sanottuna lineaarikuvaus, jos kaikilla $x, y \in \mathbb{R}^n$ ja kaikilla $\lambda \in \mathbb{R}$ pätee:

$$L(x + y) = L(x) + L(y)$$

ja

$$L(\lambda x) = \lambda L(x)$$

Esimerkki

Olkoon $a \in \mathbb{R}^n$. Osoitetaan kuvaus

$$L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : L(x) = (a \,|\, x)$$

lineaariseksi kuvaukseksi:
Olkoon $x, y \in \mathbb{R}^n$ ja $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} L(x + y) = (x + y \,|\, a) = \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) \cdot a_i = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i + \sum_{i=1}^{n} y_i a_i \\ = (x \,|\, a) + (y \,|\, a) = L(x) + L(y) \end{aligned}$$

Kuvaus täyttää siis ensimmäisen ehdon...

$$L(\lambda x) = (\lambda x \,|\, a) = \sum_{i=1}^{n} \lambda x_i \cdot a_i = \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot a_i = \lambda (x \,|\, a) = \lambda L(x)$$

...ja myös toisenkin. $\square$

Huomaa, että kuvaus voitaisiin todistaa helposti lineaariseksi myös käyttämällä hyväksi edellä mainittuja pistetulon yleisiä eli karakteristisia ominaisuuksia. Tämä jääköön kuitenkin lukijan tehtäväksi.

Esimerkki

Kuvaus $f(x) = x^2$ **ei ole lineaarinen**, sillä $f(\lambda x) = \lambda^2 x^2 \neq \lambda x^2 = \lambda f(x)$ jos $\lambda \neq 1$.

3.3.6 Matriisit

Sivuutan matriisien määritelmän ja tarkemman tutkailun ja jätän sen luennolla tehtäväksi. Sen sijaan esittelen muutamia neuvoja, joista on hyötyä demojen tekemisessä:

Jokaista lineaarikuvausta $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ vastaa yksikäsitteinen[6] matriisi $A_L = A_{m\times n}$. Tämän matriisin määrittäminen helpottuu, kun tarkastellaan kantavektorien e_i kuvautumista:

Olkoon $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineaarikuvaus, $x \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ ja

$L(x) = (a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n\ ,\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n\ ,\ \ldots\ ,\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n)$.

Huomaa, että pilkut erottavat vektorin komponentit toisistaan! Koska $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$ ja kuvaus L on lineaarinen, niin matriisin ensimmäinen *sarakevektori* saadaan laskemalla

$$L(e_1) = (a_{11}\cdot 1, a_{21}\cdot 1, \ldots, a_{m1}\cdot 1) = (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{m1}) = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}.$$

Vastaavasti laskemalla loput sarakevektorit saadaan matriisi:

$$A_L = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Tällöin:

$$A_L x = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \ldots a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + \ldots a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 +, \ldots, a_{mn}x_n \end{bmatrix} = L(x)$$

[6] Tämä todistettanee luennolla tai demoissa.

Huomaa, että voi olla $a_{ij} = 0$ millä tahansa $i, j \in \mathbb{N}$, jopa kaikilla! Lisäksi merkintä $A_L = A_{m\times n}$ tarkoittaa että A_L on $m \times n$-matriisi. Siis siinä on m riviä ja n saraketta.

Edellä ollut yleistä lineaarikuvausta vastaavan matriisin esitys lienee vähintäänkin sekava. Toivottavasti seuraava esimerkki selventää tekniikkaa.

Esimerkki

Olkoon $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $L(x) = L((x_1, x_2)) = (11x_1 + 12x_2\,,\, 21x_1 + 22x_2)$. Nyt:

$$L(e_1) = L((1,0)) = (11 + 0\,,\, 21 + 0) = (11\,,\, 21) = \begin{bmatrix} 11 \\ 21 \end{bmatrix}$$
$$L(e_2) = L((0,1)) = (0 + 12\,,\, 0 + 22) = (12\,,\, 22) = \begin{bmatrix} 12 \\ 22 \end{bmatrix}$$

Ja vastaava matriisi:

$$A_L = \begin{bmatrix} 11 & 12 \\ 21 & 22 \end{bmatrix}$$

Ole tarkka indeksien kanssa!

Monia matriiseihin liittyvä määritelmiä on vaikea yrittää hahmottaa. Varsinkin yli kolmiulotteisten vektorien tai ”tilavuuksien” käsittäminen kolmiulotteisessa maailmassa on miltei ylitsepääsemätön haaste. Siksi erityisesti lineaarialgebrassa määritelmien opetteleminen ulkoa on tärkeää. Useiden indekseihin perustuviin määritelmien kanssa on oltava tarkkana. Esimerkiksi määriteltäessä matriisin tuloa, määritelläänkin tulomatriisin j:nnen rivin i:nnessä sarakkeessa oleva alkio c_{ji}. Indeksien vaihtaminen voi johtaa hyvin kummallisiin ja lopulta turhauttaviin tuloksiin.

Demotehtävissä esiintyy usein *identiteettimatriisi* $I = [i_{kl}]$, jolle pätee $i_{kl} = 1$, kun $k = l$ ja $i_{kl} = 0$, kun $k \neq l$. Tällaisten tehtävien ratkaisu kannattaa jakaa kahteen osaan, joista ensimmäisessä tutkitaan tapaus ”$k = l$” ja toisessa tapaus ”$k \neq l$”. Esimerkiksi kahden identiteettimatriisin alkioiden tulo $i_{jk} \cdot i_{kl}$ on 1 vain jos $k = j = l$.

Lineaarialgbressa esiintyy hyvin vähän Analyysi-kursseilta tuttua arvioimista. Siten monet demotehtävät ratkeavatkin suoraan määritelmistä johtamalla tai käyttämällä niitä hyväksi.

3.3.7 Matriisien tulo

Kahdelle matriisille $A = A_{l\times m}$ ja $B = B_{m\times n}$ määritetään tulomatriisin $AB = C = C_{l\times n}$ j:nnen rivin i:nnessä sarakkeessa oleva alkio c_{ji} asettamalla:

$$c_{ji} = \sum_{k=1}^{m} a_{jk} b_{ki}$$

Huomaa, että matriisin A rivien määrä on oltava sama kuin matriisin B sarakkeiden määrä. Tällöin tulomatriisin on $l \times n$-matriisi.

Kirjoitetaan nyt matriisi $A = A_{l\times m}$ rivivektoriensa $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_l$ avulla muodossa:

$$A = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \\ \vdots \\ \vec{a}_m \end{bmatrix}$$

missä $\vec{a}_k = (a_{k1}\,,\, a_{k2}\,,\, \ldots,\, a_{km})$ on avaruuden $\mathbb{R}^m$ vektori kaikilla $k = 1, \ldots, l$. Ja kirjoitetaan matriisi $B = B_{m\times n}$ sarakevektoriensa $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_l$ avulla muodossa:

$$B = \begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \cdots & \vec{b}_m \end{bmatrix}$$

missä $\vec{b}_k = (b_{k1}\,,\, b_{k2}\,,\, \ldots,\, b_{km})$ on myös avaruuden $\mathbb{R}^m$ vektori kaikilla $k = 1, \ldots, n$.

Nyt huomataan:

$$(AB)_{ji} = c_{ji} = \sum_{k=1}^{m} a_{jk} b_{ki} = (\vec{a}_j \mid \vec{b}_i)$$

Siis tulomatriisin $C = AB$ j:nnellä rivillä, i:nnessä sarakkeessa oleva alkio c_{ji} saadaan laskemalla matriisin A j:nnen rivivektorin ja matriisin B i:nnen sarakevektorin pistetulo.

Viimeinen esimerkki

Olkoon $A = A_{n\times n}$ ja $I = I_n$. Osoitetaan, että $A^2 = I$ jos ja vain jos $(A + I)(A - I) = 0$.

$$\begin{array}{ll} \vec{a}_1 & \qquad\qquad\qquad\quad \vec{b}_1 \\ & \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{l1} & \cdots & a_{lm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} = (\vec{a}_1|\vec{b}_1) & \cdots \\ \vdots & \ddots \end{bmatrix} \end{array}$$

Todistus: "$\Rightarrow$" Koska $A^2 = I$ niin identiteettimatriisin ja matriisien tulon määritelmän nojalla $A^2_{ij} = I_{ji} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}a_{ki}$ eli:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} a_{jk}a_{ki} = 1 = I_{ji} \quad \text{kun}\, i = j \\ \sum_{k=1}^{n} a_{jk}a_{ki} = 0 = I_{ji} \quad \text{kun}\, i \neq j \end{aligned}$$

Tutkitaan tuloa $(A+I)(A-I)$:

$$((A+I)(A-I))_{ji} = \sum_{k}^{n} a_{jk}a_{ki} + \sum_{k}^{n} a_{ki}I_{jk} - \sum_{k}^{n} a_{jk}I_{ki} - \sum_{k}^{n} I_{jk}I_{ki}$$

Jaetaan summattavien termien tarkastelu nyt kahteen osaan:
Kun $i = j$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} a_{jk}a_{ki} &= 1 && \text{oletuksen nojalla} \\ \sum_{k}^{n} a_{ki}I_{jk} &= a_{ji} && \text{sillä } I_{jk} = 0 \text{ aina kun } k \neq j \\ -\sum_{k}^{n} a_{jk}I_{ki} &= -a_{ji} && \text{kuten ylempi} \\ -\sum_{k}^{n} I_{jk}I_{ki} &= -1 && \text{sillä } I_{jk}I_{ki} = 1 \text{ vain kun } k = i = j. \end{aligned}$$

$\therefore ((A+I)(A-I))_{ji} = 0$, kun $j = i$.
Kun $i \neq j$ vastaavasti:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} a_{jk}a_{ki} &= 0 && \text{oletuksen nojalla} \\
\sum_{k}^{n} a_{ki}I_{jk} &= a_{ji} && \text{sillä } I_{jk} = 0 \text{ aina kun } k \neq j \\
-\sum_{k}^{n} a_{jk}I_{ki} &= -a_{ji} && \text{kuten ylempi} \\
-\sum_{k}^{n} I_{jk}I_{ki} &= 0 && \text{sillä } I_{jk}I_{ki} = 0 \text{ kaikilla } k \text{ sillä} i \neq j.
\end{aligned}$$

$\therefore ((A+I)(A-I))_{ji} = 0$, kun $j \neq i$.
Siispä $((A+I)(A-I))_{ji} = 0$ aina kun $i = j$ ja aina kun $i \neq j$ joten $(A+I)(A-I) = 0$.

"$\Leftarrow$" Käyttäen hyväksi edellisessä päättelyssä huomattuja ominaisuuksia:

$$\begin{aligned}
(A+I)(A-I) &= 0 \\
\Rightarrow \sum_{k}^{n} a_{jk}a_{ki} + \underbrace{\sum_{k}^{n} a_{ki}I_{jk} - \sum_{k}^{n} a_{jk}I_{ki}}_{=0} - \sum_{k}^{n} I_{jk}I_{ki} &= 0 \\
\Rightarrow \sum_{k}^{n} a_{jk}a_{ki} &= \sum_{k}^{n} I_{jk}I_{ki} \\
\Rightarrow A^2_{ji} &= \sum_{k}^{n} I_{jk}I_{ki} \\
\Rightarrow A^2_{ji} &= \begin{cases} 1, & j = i \\ 0, & j \neq i \end{cases} \\
\Rightarrow A^2 &= I
\end{aligned}$$

Väite on nyt todistettu. $\square$
Kurssin loppupuoli koostuu miltei yksinomaan matriisien tutkimisesta ja niiden uusien ominaisuuksien määrittelystä ja tarkastelusta. Tämä on hyvin pitkälti mekaanista laskemista ja määritelmästä/kaavasta johtamista, joten tärkeintä on muistaa määritelmät ja olla tarkka indeksien kanssa.

Lyhenteitä ja matemaattisia merkintöjä

em. edellä mainittu

ey epäyhtlö

l. eli / lause

mv. mielivaltainen

s.e. siten, että

t.s toisin sanoen

voe voidaan olettaa, että

ht haista toki / harjoitustehtävä

$\neg A$ A:n looginen negaatio

$A \Rightarrow B$ ”Jos A niin B”

$\in$ kuuluu joukkooon

$\subset$ osajoukko

$[a, b]$ suljettu väli a:sta b:hen:
$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$

$]a, b[$ avoin väli a:sta b:hen:
$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$

$\forall$ kaikilla

$\exists$ on olemassa

$\bigcap_{i=1}^{k}$ joukkojen leikkaus ”i käy yhdestä k:hon”

$\bigcup_{i=1}^{k}$ joukkojen yhdiste ”i käy yhdestä k:hon”

$\sum_{i=1}^{k}$ summa ”i käy yhdestä k:hon”

$||x||$ vektorin x normi

$(x \,|\, y)$ vektoreiden x ja y pistetulo

$A_{m \times n}$ matriisi A, jossa on m riviä ja n saraketta

A_{ij} matriisin A i:nnen rivin j:nnessä sarakkeessa oleva alkio

Kirjallisuutta

[1] Lakatos: *Proofs and Refutations - the Logic of Mathematical Discovery,* kirja

[2] Polya: *How to Solve it - A New Aspect of Mathematical Method,* kirja

[3] Polya: *Mathematical Discovery - On Understanding, Learning and Teaching Problem Solving,* kirja

[4] Tero Kilpeläinen: *Analyysi 1,* moniste, Jyväskylän yliopisto, Matematiikan laitos 2000/2002 [7]

[5] Veikko T. Purmonen: *Lineaarinen algebra ja geometria,* moniste, Jyväskylän yliopisto, Matematiikan laitos 2007

[6] Paavo Heiskanen: *Jatkuvuus- ja derivoituvuuskäsitteet lukion pitkässä matematiikassa,* http://urn.fi/URN:NBN:fi:jyu-2006599 Pro gradu -tutkielma, Jyväskylän yliopisto, Matematiikan laitos 2006

[7] Monisteen sai ladattua aiemmin Kilpeläisen kotisivuilta, mutta nyt opinto-opas neuvoo katsomaan kurssin kotisivuja. Lisätietoja tullee kurssilla.