Hilbertin aksioomat ja tarvittavat määritelmät
Tiivistelmä Geometria-luentomonisteesta

Heikki Pitkänen

1. Hilbertin aksioomat 1-3

Oletetaan tunnetuiksi peruskäsitteet: *piste*, *suora* ja *suora kulkee pisteen kautta*. Viimeinen tarkoittaa samaa kuin *piste kuuluu suoralle* ja sen vastakohta on *piste on suoran ulkopuolella*. Merkitään pisteiden P ja Q kautta kulkevaa suoraa $\overleftrightarrow{PQ} = \overleftrightarrow{QP}$, jolloin oletetaan, että $P \neq Q$.

Hilbertin aksiooma 1. Jos P ja Q ovat pisteitä, niin on olemassa yksi ja vain yksi suora, joka kulkee sekä P:n että Q:n kautta.

Hilbertin aksiooma 2. Jokaiseen suoraan sisältyy ainakin kaksi pistettä.

Hilbertin aksiooma 3. On olemassa kolme eri pistettä siten, että mikään suora ei kulje niiden kaikkien kautta.

Määritelmä 1 (Suorien yhdensuuntaisuus)**.** Olkoot l ja m suoria. Niitä sanotaan *yhdensuuntaisiksi*, jos ei ole pistettä, jonka kautta ne molemmat kulkevat. Merkitsemme tällöin $l \parallel m$, muutoin $l \nparallel m$.

Huomautus 1. Jos kirjoitamme $l \parallel m$, niin ilmaisemme myös, että $l \neq m$ aksiooman 1 nojalla.

2. Hilbertin aksioomat 4-7

Otetaan käyttöön välissäolon käsite. Merkitään $A * B * C$ ja luetaan se *"piste B on pisteiden A ja C välissä"*. Välissäolon tulee toteuttaa seuraavat aksioomat.

Hilbertin aksiooma 4. Jos $A*B*C$, niin A, B ja C ovat eri pisteitä, joiden kaikkien kautta kulkee sama suora ja $C * B * A$.

Hilbertin aksiooma 5. Jos A ja B ovet eri pisteitä, niin suoralla $\overleftrightarrow{AB}$ on pisteet C, D ja E siten, että $C * A * B$, $A * D * B$ ja $A * B * E$.

Huomautus 2. Aksiooma 5 takaa, ettei suora $\overleftrightarrow{AB}$ pääty pisteeseen A tai B eikä ole tyhjä niiden välillä.

Hilbertin aksiooma 6. Jos A, B ja C ovat eri pisteitä, jotka kuuluvat samalle suoralle, niin yksi ja vain yksi seuraavista ehdoista on voimassa: $A * B * C$, $A * C * B$ tai $B * A * C$.

Huomautus 3. Aksioomista 1-6 seuraa, että jokaisella suoralla on ainakin viisi pistettä, mutta niistäkään ei vielä seuraa, että millään suoralla tai edes koko mallissa tarvitsisi olla äärettömän monta pistettä.

Määritelmä 2 (Jana ja puolisuora)**.** Olkoot A ja B eri pisteitä.

(1) Joukkoa

$$AB := \{C \text{ on piste} \mid A * B * C \text{ tai } C = A \text{ tai } C = B\}$$

sanotaan *pisteiden A ja B väliseksi janaksi AB.*

(2) Joukkoa

$$\overrightarrow{AB} = AB \cup \{C \text{ on piste} \mid A * B * C\}$$

sanotaan *puolisuoraksi pisteestä A pisteen B suuntaan.*

Huomautus 4. Aksiooman 4 nojalla $AB = BA$. Kun kirjoitamme AB tai $\overrightarrow{AB}$, ilmaisemme samalla, että $A \neq B$.

Määritelmä 3 (Vastakkaiset puolisuorat)**.** Puolisuoria $\overrightarrow{AB}$ ja $\overrightarrow{AC}$ sanotaan *vastakkaisiksi*, jos $B * A * C$.

Määritelmä 4 (Pisteiden sijaitseminen samalla puolella suoraa)**.** Olkoon l suora ja A ja B pisteitä, joiden kautta l ei kulje. Sanomme, että A ja B *ovat samalla puolella suoraa l* ja merkitsemme ABl tai BAl, jos $A = B$ tai suora l ei sisällä janan AB pisteitä. Muussa tapauksessa sanomme, että A ja B *ovat eri puolilla suoraa l* ja merkitsemme BlA tai AlB.

Huomautus 5. Siis AlB, jos ja vain jos l leikkaa janaa AB, mutta ei sen päätepisteissä.

Hilbertin aksiooma 7. Olkoot l suora sekä A, B ja C pisteitä, joiden kautta suora l ei kulje. Tällöin on voimassa:

i) Jos ABl ja BCl, niin ACl.
ii) Jos AlB ja BlC, niin ACl.

Määritelmä 5 (Puolitaso)**.** Olkoon l suora ja A piste, jonka kautta l ei kulje. Joukkoa $\{P \mid APl\}$ sanotaan *suoran l rajoittamaksi pisteen A määräämäksi puolitasoksi.*

Määritelmä 6 (Kolmio, sivut, kulma, kyljet, kärjet)**.**

(1) Järjestettyä pistekolmikkoa (A, B, C), joka ei sisälly mihinkään suoraan, sanotaan *kolmioksi* $\triangle ABC$. Jos $\triangle ABC$ on kolmio, niin sanomme janoja AB, BC ja CA sen *sivuiksi* ja pisteitä A, B ja C sen *kärjiksi.*
(2) Jos $\triangle ABC$ on kolmio, niin *kulma* $\measuredangle ABC$ muodostuu puolisuorista $\overrightarrow{BA}$ ja $\overrightarrow{BC}$, joita sanomme kulman $\measuredangle ABC$ *kyljiksi.* Kylkien yhteistä päätepistettä B sanotaan kulman $\measuredangle ABC$ *kärjeksi.*

Määritelmä 7 (Kulman sisäpuoli)**.** Olkoot A, B ja C pisteitä, jotka eivät ole samalla suoralla. Sanomme, että piste D *on kulman $\measuredangle BAC$ sisäpuolella*, jos $DC\overleftrightarrow{BA}$ ja $DB\overleftrightarrow{AC}$.

Määritelmä 8 (Puolisuora toisten välissä)**.** Olkoon $\measuredangle BAC$ kulma ja D piste, $D \neq A$. Sanomme, että puolisuora $\overrightarrow{AD}$ on puolisuorien $\overrightarrow{AB}$ ja $\overrightarrow{AC}$ *välissä*, jos D on kulman $\measuredangle BAC$ sisäpuolella.

Määritelmä 9 (Kolmion sisäpuoli)**.** Olkoon $\triangle ABC$ kolmio. Merkitsemme sen kulmia lyhyesti $\measuredangle A = \measuredangle BAC$, $\measuredangle B = \measuredangle ABC$ ja $\measuredangle C = \measuredangle ACB$. Sanomme, että piste P *on kiolmion $\triangle ABC$ sisäpuolella*, jos P on jokaisen kulman $\measuredangle A$, $\measuredangle B$ ja $\measuredangle C$ sisäpuolella. Jos piste P ei ole kolmion $\triangle ABC$ sisäpuolella eikä ole minkään sen sivun piste, niin sanomme, ett P on kolmion $\triangle ABC$ *ulkopuolella.*

3. Hilbertin aksioomat 8-13

Otetaan käyttöön kaksi peruskäsitettä, joista molemmista käytämme nimitystä *yhtenevyys*. Näistä ensimmäinen on relaatio kahden janan välillä, jälkimmäinen on relaatio kahden kulman välillä. Merkitsemme ensimmäistä $AB \cong CD$ ja luemme *"janat AB ja CD ovat yhteneviä"*. Jälkimmäistä merkitsemme $\measuredangle ABC \cong \measuredangle DEF$ ja luemme *"kulmat $\measuredangle ABC$ ja $\measuredangle DEF$ ovat yhteneviä"*.

Hilbertin aksiooma 8. Jos A ja B ovat eri pisteitä ja $\overrightarrow{PQ}$ on mielivaltainen puolisuora, niin on olemassa yksi ja vain yksi piste $R \in \overrightarrow{PQ}$ siten, että $AB \cong PR$.

Hilbertin aksiooma 9. Janojen yhtenevyys on ekvivalenssirelaatio, eli:
i) $AB \cong AB$ (refleksiivisyys)
ii) Jos $AB \cong CD$, niin $CD \cong AB$ (symmetrisyys)
iii) Jos $AB \cong CD$ ja $CD \cong EF$, niin $AB \cong EF$ (transitiivisuus)

Hilbertin aksiooma 10. Jos $A * B * C$, $A' * B' * C'$ ja $AB \cong A'B'$ ja $BC \cong B'C'$, niin $AC \cong A'C'$.

Määritelmä 10 (Janan monikerrat)**.** Olkoon AB jana ja $n \in \mathbb{N} = \{1, 2 \ldots\}$. Janan *$AB$ monikerta (suuntaan $\overrightarrow{AB}$)* on jana $n \cdot AB = AB_n$, missä $B_1 = B$ ja B_{n+1} on se (aksiooman 8 takaama) yksikäsitteinen piste puolisuoralla $\overrightarrow{AB_n}$, jolle $A * B_n * B_{n+1}$ ja $B_nB_{n+1} \cong AB$.

Hilbertin aksiooma 11. Olkoon $\measuredangle ABC$ kulma, $\overrightarrow{DE}$ puolisuora ja P piste, joka ei sisälly suoraan $\overleftrightarrow{DE}$. Tällöin on olemassa yksi ja vain yksi puolisuora $\overrightarrow{DF}$ siten, että $FP\overleftrightarrow{DE}$ ja $\measuredangle ABC \cong \measuredangle FDE$.

Hilbertin aksiooma 12. Kulmien yhtenevyys on ekvivalenssirelaatio.

Määritelmä 11 (Kolmioiden yhtenevyys)**.** Olkoot $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ kolmoita. Sanomme, että ne ovat *yhteneviä kolmioita* ja merkitsemme $\triangle ABC \cong \triangle DEF$, jos niitä vastaavat sivut ja kulmat ovat yhteneviä, eli $AB \cong DE$, $BC \cong EF$, $AC \cong DF$, $\measuredangle A \cong \measuredangle D$, $\measuredangle B \cong \measuredangle E$ ja $\measuredangle C \cong \measuredangle F$. Muissa tapauksissa merkitsemme $\triangle ABC \ncong \triangle DEF$.

Huomautus 6. Huomaa, että kolmioiden yhtenevyys riippuu järjestyksestä!

Hilbertin aksiooma 13 (Sivu-kulma-sivu -sääntö, SKS)**.** Olkoot $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ kolmioita siten, että $\measuredangle A \cong \measuredangle D$, $AB \cong DE$ ja $AC \cong DF$. Tällöin $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Määritelmä 12 (Eripituiset janat)**.** Olkoot AB ja CD janoja. Sanomme, että *jana AB on lyhyempi kuin jana CD*, jos on olemassa piste E siten, että $C * E * D$ ja $AB \cong CE$. Tällöin merkitsemme $AB < CD$.

Määritelmä 13 (Täydennyskulma)**.** Olkoon $\measuredangle ABC$ kulma ja $D * B * C$. Sanomme, että kulma $\measuredangle DBA$ on kulman $\measuredangle ABC$ *täydennyskulma*. Jos lisäksi $\measuredangle DBA \cong \measuredangle ABC$, niin sanomma, että kulma $\measuredangle ABC$ on *suora kulma*.

Määritelmä 14 (Suoran normaali)**.** Olkoot $\overleftrightarrow{AB}$ ja $\overleftrightarrow{AC}$ kaksi eri suoraa, jotka leikkaavat pisteessä A siten, että kulma $\measuredangle BAC$ on suora. Tällöin sanomme, että suora $\overleftrightarrow{AC}$ on suoran $\overleftrightarrow{AB}$ *normaali* ja merkitsemme $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{AC}$.

Määritelmä 15 (Erisuuruiset kulmat)**.** Olkoot $\measuredangle ABC$ ja $\measuredangle DEF$ kulmia. Sanomme, että kulma $\measuredangle ABC$ *on pienempi kuin* kulma $\measuredangle DEF$ ja merkitsemme $\measuredangle ABC < \measuredangle DEF$, jos puolisuorien $\overrightarrow{ED}$ ja $\overrightarrow{EF}$ välissä on puolisuora $\overrightarrow{EG}$ siten, että $\measuredangle ABC \cong \measuredangle GEF$.

4. Arkhimedeen aksiooma

Arkhimedeen aksiooma 1. Olkoot AB ja CD janoja. Tällöin on olemassa $n \in \mathbb{N}$ ja piste E siten, että $C * D * E$ ja $CE \cong n \cdot AB$.

Määritelmä 16 (Janan keskipiste)**.** Olkoon AB jana. Sanomme, että piste $C \in AB$ *on janan* AB *keskipiste*, jos $AC \cong CB$.

Määritelmä 17 (Janan pituus)**.** Janan AB *pituudeksi* sanotaan reaalilukua

$$\overline{AB} = \lim_{n\to\infty} m_n.$$

Määritelmä 18 (Kulman puolittaja)**.** Olkoon $\measuredangle ABC$ kulma. Puolisuora $\overrightarrow{BD}$ on *kulman* $\measuredangle ABC$ *puolittaja*, jos $\overrightarrow{BD}$ on janojen $\overrightarrow{BA}$ ja $\overrightarrow{BC}$ välissä ja $\measuredangle ABD \cong \measuredangle DBC$.

Määritelmä 19 (Defekti)**.** Olkoot $\triangle ABC$ kolmio. Sanotaan, että kolmion $\triangle ABC$ *defekti*, eli *kulmapoikkeama* $\operatorname{def}(\triangle ABC)$ on luku

$$\operatorname{def}(\triangle ABC) = 180 - \big((\measuredangle A)^\circ + (\measuredangle B)^\circ + (\measuredangle C)^\circ\big) \in \mathbb{R}.$$

Määritelmä 20 (Nelikulmio)**.** Järjestettyä pistenelikköä (A, B, C, D) sanotaan *nelikulmioksi* $\square ABCD$, jos mitkään kolme niistä ei vät ole samalla suoralla eivätkä janat AB ja CD leikkaa toisiaan eivätkä myöskään BC ja AD leikkaa toisiaan.

(1) Pisteet A, B, C ja D ovat nelikulmion $\square ABCD$ *kärjet.*
(2) Janat AB, BC, DC ja DA ovat sen *sivut.*
(3) $\measuredangle ABC$, $\measuredangle BCD$, $\measuredangle CDA$ ja $\measuredangle DAB$ ovat sen *kulmat.*
(4) Nelikulmio, jonka kaikki kulmat ovat suoria on *suorakulmio.*

5. Dedekindin aksiooma

Määritelmä 21 (Ympyrä)**.** Olkoon O piste ja $r \in \mathbb{R}$; $r > 0$. Sanotaan, että joukko $\{P \mid \overline{OP} = r\}$ on *O-keskipisteinen, r-säteinen ympyrä.*

Määritelmä 22 (Ympyrän sisäpuoli)**.** Olkoon α O-keskipisteinen, r-säteinen ympyrä ja P piste. Jos $P = O$ tai $\overline{OP} < r$, niin sanotaan , että piste P on ympyrän α *sisäpuolella*, ja jos $\overline{OP} > r$, niin sanotaan, että P on ympyrän α *ulkopuolella.*

Määritelmä 23 (Dedekindin ehdot)**.** Olkoon l suora, $L = \{P \mid P \text{ sisältyy suoraan } l\}$ sen kaikkien pisteiden joukko ja D_1 ja $D_2 \subset L$. Sanomme, että D_1 ja D_2 toteuttavat *Dedekindin ehdot*, mikäli

(1) $D_1 \neq \emptyset$ ja $D_2 \neq \emptyset$
(2) $D_1 \cap D_2 = \emptyset$
(3) $D_1 \cup D_2 = L$
(4) Jos $P, Q \in D_1$, niin ei ole olemassa pistettä $R \in D_2$, jolle olisi $P * R * Q$

(5) Jos $P, Q \in D_2$, niin ei ole olemassa pistettä $R \in D_1$, jolle olisi $P * R * Q$

Dedekindin aksiooma 1. Olkoon l suora, $L = \{P \mid P \text{ sisältyy suoraan } l\}$ sen kaikkien pisteiden joukko ja D_1 ja $D_2 \subset L$ siten, että D_1 ja D_2 toteuttavat Dedekindin ehdot. Tällöin on olemassa tasan yksi piste $P \in L$ siten, että kaikille $Q, R \in L$ pätee $Q * P * R$, jos ja vain jos $Q \in D_1$ ja $R \in D_2$ tai $Q \in D_2$ ja $R \in D_1$.

Määritelmä 24 (Ympyrän tangentti)**.** Suora l on ympyrän α *tangentti*, jos ympyrällä α ja suoralla l on täsmälleen yksi yhteinen piste.

Määritelmä 25 (Janan keskinormaali)**.** Olkoon AB jana ja C sen keskipiste. Pisteen C kautta kulkevaa suoran $\overleftrightarrow{AB}$ normaalia kutsutaan janan AB *keskinormaaliksi.*

6. Paralleeliaksiooma

Paralleeliaksiooma 1. Jos l on suora ja P piste, joka ei sisälly suoraan l, niin P:n kautta kulkee korkeintaan yksi suora, joka on yhdensuuntainen suoran l kanssa.

Määritelmä 26. Olkoon $\square ABCD$ nelikulmio. Sanotaan, että $\square ABCD$ on *suunnikas*, mikäli $\overleftrightarrow{A}B \parallel \overleftrightarrow{CD}$ ja $\overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{DA}$.

Määritelmä 27. Olkoot $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ kolmioita siten, että $\measuredangle A \cong \measuredangle D$, $\measuredangle B \cong \measuredangle E$ ja $\measuredangle C \cong \measuredangle F$. Tällöin sanotaan, että kolmiot $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ ovat *samanmuotoiset* ja merkitään $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

Lähteet

[1] Lassi Kurittu, Veli-Matti Hokkanen & Lauri Kahanpää: *Geometria,* Luentomoniste nro 57, Jyväskylän Yliopisto: Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Jyväskylä 2008.