Irrationaaliluvut ja seksi

Heikki Pitkänen

16. elokuuta 2013

1 Johdanto

Tämä katsaus matematiikan historiaan lähtee liikkeelle seuraavasta toteamuksesta: "Seksin saaminen on kuin irrationaalilukujen approksimoiminen rationaaliluvuilla — pääset helvetin lähelle mutta loppupeleissä et sitten kuitenkaan saavuta sitä." Matemaattisesti tämä vaikuttaa hyvin triviaalilta, mutta historia tämän lauseen takana on pitkä. Jos olet jostain onnistunut löytämään rationaalisen naisen, niin mitä helvettiä sinä tätä luet? Luulisi olevan tekemässä sitä. Senkin onnekas paska.

2 Antiikin Kreikka

Lähdemme liikkeelle antiikin Kreikasta. Sillon ajat olivat hyvin, naiset rationaalisia ja jopa matemaatikot luulivat, että saaminen on helppoa, kunnes Hippasos Metopontiolainen tuli ja ryssi kaiken. Hippasoksen onnistui nimittäin todistaa, että on olemassa irrationaalisia naisia[1]. Puutteesta turhautuneet pythagoralaiset erottivat hänet seurastaan. Epäillään, että hänet lisäksi raiskattiin hengiltä ja lavastettiin hukkuneeksi, mutta tästä ei ole varmuutta, sillä nämä sivut historian kirjassa ovat liimautuneet yhteen.

3 Keskiaika

Yhtään syyttävällä sormelle osoittelematta eurooppalaisen valtauskonnon suuntaan minkäänlaista kehitystä saamisen edistämiseksi ei tapahtunut.

4 Dirichlet ja Hurwitz

Vuonna 1842 Dirichlet'n onnistui melkein saada. Hän todisti myös, että irrationaaliselle naiselle α on olemassa äärettömän monta hyvää yritystä $\frac{p}{q}$, siis

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}.$$

[1] Ajatella!

Todistus perustuu niin sanottuun ”kyyhkyslakkaperiaatteeseen”: Jos yrität tarpeeksi monta kertaa, niin eiköhän joku onnista.

Tätä lausetta paransi edelleen Hurwitz vuonna 1891: Irrationaaliselle naiselle α on olemassa äärettömän monta yritystä $\frac{p}{q}$ siten, että

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2}.$$

Toivon kipinä oli syttynyt.

5 Ketjuvonkuyritykset

Dirichlet'n lauseesta innostuneet matemaatikot rupesivat kehittämään keinoa näiden hyvien yritysten löytämiseksi. Tajuttiin ketjuvonkuyrityksien merkitys. Idea on hyvin yksinkertainen:

1) Otetaan tiettävästi paras yritys: $a_0 = \lfloor\sqrt{2}\rfloor = 1$

2) Katsotaan, missä meni pieleen: $a_1 = \left\lfloor\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right\rfloor = 2$

3) Käännetään kaikki ylösalaisin: $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2}$

4) Yritetään uudelleen

Ei liene yllätys, ettei näinkään lohjennut.

6 Cantor

Matemaatikoiden epätoivoa pahensi Cantorin vuonna 1878 esittelemä mahtavuuden käsite. Hän todisti, että irrationaalilukujen joukko on mahtavampi kuin rationaalilukujen. Toisin sanoen irrationaalilukuja on helvetin paljon enemmän kuin rationaalilukuja.

7 Liouvillestä Rothiin

Irrationaalisia naisia tutkittaessa havaittiin, ettei kaikilta voida edes vongata yhtä hyvin. Irrationaaliluvut voidaan jakaa niin sanottuihin algebrallisiin ja transkendenttisiin lukuihin. Näistä ensimmäiset ovat toivottomia tapauksia. Liouville todisti nimittäin jo vuonna 1884, että algebralliselle luvulle α, jonka aste d on vähintään 2 on olemassa vakio $c > 0$ siten, että kaikilla rationaaliluvuilla $\frac{p}{q}$ pätee

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{c}{q^d}.$$

Eihän tämä niin pahalta vaikuta — valitaan vain tarpeeksi iso d! Kaikkien matemaatikoiden epäonneksi Roth veti maton jalkojen alta todistamalla, että edellisin oletuksin kaikille $\varepsilon > 0$ on olemassa vain *äärellisen* monta hyvää yritystä siten, että

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{2+\varepsilon}}.$$

Tämä hävitti edellisissä tuloksissa esiintyneen riippuvuuden algebrallisen luvun asteesta d. Tulos oli matemaatikoiden keskuudessa niin musertava, että Rothille annettiin "Fieldsin kädestä" vuonna 1958.

Tarkkaavainen lukija saattaa tässä vaiheessa kysyä, mihin unohdimme ne transkendenttiluvut. Noh, homman nimi on se, että edes niiden osoittaminen transkendenttiseksi on usein niin vaikeaa, ettei kukaan ole vaivautunut oikeasti yrittämään. Liouvillen ja Rothin lause mahdollistavat kyllä niiden konstruoimisen, mutta sehän olisin vähän niin kuin masturbointia, eikö?

Kirjoittaja on Diofantoksen approksimoinnista ja Rothin lauseesta gradunsa kirjoittanut mies.