

Matemaatikon silmin

Osa 1: ”=”

Heikki Pitkänen

10.09.2013

Useissa yhteyksissä, erityisesti sosiaalisessa mediassa, näkee käytettävän yhtäsuuruusmerkkiä ”=” matemaatikon silmin hyvin hämmentävästi. Otetaan fikttiiviseksi esimerkiksi keksityn Facebook-käyttäjän statuspäivitys ”Tami = legenda”. Luettuna status vaikuttaa varsin selkeältä kannanotolta meneillöolevaan Julkkis-BigBrother -kilpailuun, mutta matemaatikko näkee tässä yhtälön, jota hän ei voi käsittää. Miksi? Tutustutaan hieman *yhtäsuuruusrelaatioon* ”=” matemaattisessa mielessä.

*Relaatio*¹ ”=” on niin sanottu *ekvivalenssirelaatio*. Sillä on siis seuraavat kolme ominaisuutta:

1. ”=” on *refleksiivinen*. Tämä tarkoittaa sitä, että kaikilla a pätee $a = a$. Esimerkissämme siis ”Tami = Tami”. No tottakai! Matemaatikkomme voi kuitenkin tässä vaiheessa hymähtää keksittyään esimerkin ei-refleksiivisestä relaatiosta.
2. ”=” on *symmetrinen*. Tämä tarkoittaa sitä, että ehdosta $a = b$ seuraa $b = a$. Vaikuttaa aikamoiselta turhalta matemaattiselta puliveivaamiselta. Esimerkissämme tämä kuitenkin tarkoittaisi sitä, että väitteestä ”Tami = legenda” tulisi seurata ”legenda = Tami”. Tämä ei luettuna vaikuta enää aivan yhtä vakuuttavalta (ellet puhu yodaa äidinkielenäsi). Ovatko kaikki legendat Tameja? Onko Tami ainoa legenda? Matemaatikkomme otsasuoni pullistuu. Ongelma syntyy viimeistään seuraavassa vaiheessa.
3. ”=” on *transitiivinen*. Tämä tarkoittaa sitä, että ehdosta $a = b$ ja ehdosta $b = c$ seuraa $a = c$. Pätee edelleen vaikkapa kokonaisluvuille, mutta entäpä jos joku toinen Facebook-käyttäjä keksii muodostaa oman yhtälönsä? Oletetaan toisen käyttäjän tehneen yhtä pätevän väitteen ”Andy = legenda”.² Tällöin ”Andy = legenda” ja symmetrisyyden nojalla ”legenda = Tami”. Nyt transitiivisuuden nojalla tulisi seurata ”Andy = Tami”. Hupsista!

Matemaatikkomme päättää mennä nukkumaan.

¹Relaation voisi karkeasti sanoa olevan semmoinen asia minkä voi laittaa kahden luvun (tai yleisemmin joukon kahden alkion väliin). Esimerkiksi luvuilla ” \leq ”, ” $<$ ”, ” \geq ”, ” $>$ ” ja ”=” tai joukoilla ” \subset ” ja ” \supset ”.

²Väitteen totuusarvosta voimme olla kaikki samaa mieltä — toisin kuin edellisen kohdalla. Oletetaan nyt molempien väitteiden olevan tosia.