

Matemaatikon silmin

Osa 3: Aksiomat

Heikki Pitkänen

28. tammikuuta 2014

Huom: Tässä tekstissä mainitaan, että **jumalaa ei ole olemassa**. Jos olet uskovainen ja epäilet, että moinen väite voi saada sinut pahoittamaan mielesi, älä lue pidemmälle.

Huom2: Tässä tekstissä mainitaan myös, että **jumala on olemassa**. Jos olet ateisti ja epäilet, että moinen väite voi saada sinut pahoittamaan mielesi, älä lue pidemmälle.

Huom3: Tässä tekstissä todella mainitaan molemmat edellisistä väitteistä. Jos olet agnostikko, kasvata pallit ja ota kantaa. Ei oo mitään käyttistä tolla.

Kuten edellä olevasta voi päätellä, on tämänkertaisen pohdiskelun aiheena uskonnot. Matemaatikko ihmettelee nyt, miten uskonnot liittyvät otsikkoon. Ei-matemaatikko ihmettelee, mitä aksiomat ovat. Tutustutaan ensin aksiomiin, matemaatikko voi siirtyä seuraavaan lukuun.

Matematiikka on tieteenala, jossa kaikki väitteet pyritään perustelemaan aukottomasti johtamalla ne edellisistä, todeksi todistetuista, väitteistä. Toisin sanoen matemaatikon esitellessä jotain *lausetta*, voidaan aina kysyä, miksi näin on. Matemaatikko perustelee tuloksensa käyttäen muita lauseita, joiden kohdalla voidaan taas kysyä, miksi näin on. Ja niin edelleen, kunnes pääsemme pisteeseen, jossa matemaatikko tuhahtaa ”no sehän on aksioma” (vaikkei välttämättä olisikaan) ja palaa työhuoneensa henkseleitä paukutellen. Jaa, että mikä aksioma? Esimerkiksi

(P1) 0 on luonnollinen luku

on eräs *Peanon*¹ aksioma. Koska väitteiden johtaminen pelkästään tämän aksiooman pohjalta on aika hiljaista, Peanon aksioomia on useampi ja ne muodostavat oman *aksiomajärjestelmänsä*. Peanon aksioomia käyttämällä voidaan todistaa väite $1 + 1 = 2$. Vinhaa!

Toinen esimerkki aksiomajärjestelmästä on *Hilbertin*² aksiomat

(H1) Jos P ja Q ovat eri pisteitä, on olemassa yksi ja vain yksi suora, joka kulkee sekä pisteen P että pisteen Q kautta.

(H2) Jokaiseen suoraan sisältyy vähintään kaksi eri pistettä.

¹Giuseppe Peano (27. elokuuta 1858 — 20. huhtikuuta 1932), italialainen matemaatikko.

²David Hilbert (23. tammikuuta 1862 — 14. helmikuuta 1943), saksalainen matemaatikko.

(H3) On olemassa kolme eri pistettä siten, että mikään suora ei kulje niiden kaikkien kautta.
jne. . .

Niiden avulla voidaan todistaa tasogeometriaa koskevia väitteitä, kuten ”kolmion kulmien summa on 180”. Peanon aksioomien ansiosta nyt myös matemaatikot tietävät millainen luku 180 on!

Aksioomajärjestelmäksi voidaankin valita mikä tahansa keskenään ristiriidaton joukko lauseita. Lisäksi pyritään siihen, että järjestelmä on minimalistinen, eli ettei järjestelmän aksioomaa voi todistaa oikeaksi tai varsinkaan vääräksi sen muita aksioomia käyttäen.

Aksiomaattinen uskonto

Aksiooma on siis peruslause, jolla perustellaan asioita, mutta sitä ei tarvitse perustella, vaan sen *uskotaan* olevan tosi. Ja näin pääsemmekin aasinsillalla siihen, mitä minun piti kirjoittaa eli aksiomaattiseen uskontoon. Otetaan aksioomajärjestelmäksi esimerkiksi kymmenen käskyä

§1 Minä olen Herra, sinun Jumalasi. Sinulla ei saa olla muita jumalia.

§2 Älä käytä väärin Herran, Jumalasi, nimeä.

...

§7 Älä varasta.

...

§9 Älä tavoittele lähimmäisesi omaisuutta.

§10 Älä tavoittele lähimmäisesi puolisoa, työntekijöitä, karjaa äläkä mitään, mikä hänelle kuuluu.

Näistä ensimmäisessä todetaan Herran, sinun Jumalasi olemassaolo ja yksikäsitteisyys. Seuraavassa annetaan sille nimi Herra. Tai Jumalasi. Hieman sekavaa — ilmeisesti näiden kirjoittaja ei ole ollut matemaatikko. Tämä aksiooma myös kertoo, että nämä nimet kuuluvat joukkoon sanoja, joita ei tule käyttää väärin. Näiden pohjalta voidaan jo todistaa, että Perkele ei ole Jumala³, eikä sanan ”Perkele” käyttö ole jumalanpilkkaa, kunhan olemme tarkasti määritelleet, mitä tarkoittaa jumalanpilkka.

Muut aksioomat ovat varsin irrallisia toisistaan, mutta 7., 9. ja 10. aksiooman voisi yhdistää määrittelemällä (uudelleennumeroinnin jälkeen) 8. aksiooma muotoon ”Älä tavoittele lähimmäisesi, omaisuutta, puolisoa, työntekijöitä, karjaa äläkä mitään, mikä hänelle kuuluu.” Näin saadaan minimalistinen aksioomajärjestelmä.

Ongelmalliseksi tällaisen aksioomajärjestelmän tekee se, että siinä esiintyy edelleen hyvin monia käsitteitä kuten ”lähimmäinen” ja ”tavoittelu”. Tavoittelullahan voidaan tarkoittaa tulkinnasta riippuen kadehtimista ja lähimmäisellä naapurin Pekkaa. Tällöin edellinen yhdistäminen mahdollistaisi varkauden, mutta ei Pekan uuden mopon kadehtimista meen ihan just nukkumaan.

Nyt varmaan jo ateistin sappi kiehuu. Tämä johtuu siitä, että ateistin ensimmäiset aksioomat ovat

³Joku esi-isistämme voisi olla eri mieltä ja määritellä aksioomajärjestelmänsä toisin.

A1 Jumalaa ei ole olemassa.

A2 Olen oikeassa.

A3 Jäätelö on hyvää.

Näistä ensimmäinen on ristiriidassa edellisten aksioomien §1 ja §2 kanssa, eikä sitä sen takia voida ottaa kymmeneen aksioomaan. Tämän takia **uskovaisten ja ateistien ei tule väitellä**, sillä molemmat ovat oikeassa ja väärässä yhtä aikaa riipuen kummasta aksioomajärjestelmästä katsoo⁴. Tietysti aina voidaan väitellä onko ensimmäinen aksioomista todistettavissa muilla keinoilla. Esimerkiksi §1:lle ja A1:lle molemmille löytyy ”matemaattinen todistus”. Ilmeistä onkin, ettei näihin todistuksiin ole käytetty samaa aksioomajärjestelmää. Johdospäätöksenä siis se, ettei ihmisten ylipäätään kannattaisi väitellä, sillä heidän aksioomajärjestelmänsä eroavat ja pahimmassa tapauksessa ovat itsessään ristiriitaisia.

Saatteeksi: Jos nyt alkuhuomautuksista huolimatta pahoitit mielesi, niin muista, että se johtuu ihan vain siitä, että *sinä* pahoitit mielesi ja minä olen oikeassa.

⁴Ei tarkoita sitä, että agnostikot olisivat oikeassa. He jättivät pelin kesken siinä vaiheessa, jossa määriteltiin mitä tarkoittaa jumala.