# RAKKAUS MATEMAATTISENA RELAATIONA

HEIKKI PITKÄNEN

## Johdanto

Matematiikka mielletään usein hyvin kuivaksi ja kaavoihinsa kangistuneeksi tieteenalaksi. Tämän tekstin tarkoitus on kuitenkin osoittaa, että puhdas matematiikka voi olla mielenkiintoista, ehkä jopa hauskaakin. Tarkoitus ei suinkaan ole määritellä tai mitata[1] rakkautta matemaattisesti. Päinvastoin! Koko vitsi perustuu siihen, ettemme varsinaisesti määrittele, mitä rakkaus on.

Puhtaassa matematiikassa lähdetään liikkeelle yksinkertaisista ja hyvin intuitiivisista perusolettamuksista (aksioomat). Esimerkiksi eräs geometriaan liittyvä aksiooma on: ”Jokaiseen suoraan sisältyy ainakin kaksi pistettä”. Kun aksioomat on valittu, keksitään yksinkertaisia nimiä hieman monimutkaisemmille asioille (määritelmät) ja lopulta muodostetaan näistä väitteitä (lauseet), jotka pyritään todistamaan oikeiksi.

Myös tässä tutkielmassa lähdemme liikkeelle yksinkertaisista asioista, keksimme nimiä ja teemme muutaman lauseen, jotka voimme todistaa tosiksi näiden määritelmien nojalla. Tehtyjen määritelmien määrä on todella suuri, jolloin lukijalle jää mahdollisuus muodostaa helposti omia lauseita niiden pohjalta. Itse rakkauden aksioomiin emme sekaannu, sillä se veisi meidät hyvin, hyvin pitkälle matkalle rakkauden monimutkaiseen maailmaan, jossa logiikan lait eivät aina päde. Vaikka painotus on pitkälti viihteellisellä puolella, on jokainen lause myös matemaattisesti täysin pätevä. Tarkoitus on, että kaikki lauseet todistuksineen olisivat ymmärrettävissä ilman syvempää tuntemusta matematiikasta. Yleisimmät tekstissä esiintyvät merkinnät on selitetty liitteessä A.

Jos tekstin lukeminen onnistuu herättämään sinussa mielenkiintoa matematiikkaa kohtaan, suosittelen tutustumaan johonkin diskreetin matematiikan opukseen [[1],[5]]. Matematiikan opiskelijalle toivon tämän tuovan hieman vaihtelua harmaaseen analyysiin.

[1]Valitettavasti usein myös erehdytään kuvittelemaan, että matematiikka olisi vain numeroilla laskemista. Kuinka monta laskua löydät tästä tekstistä?

## 1. Rakkausrelaatio

**Määritelmä 1.** Olkoon $I$ kaikkien ihmisten joukko ja $a, b \in I$. Määritellään relaatio ”$\heartsuit$”:

$$a \heartsuit b \Leftrightarrow \text{ a rakastaa b:tä.}$$

*Huomautus* 2. Määritelmässä esiintyvälle käsitteelle ”a rakastaa b:tä” on monta keskenään ekvivalenttia määritelmää. Määritelmien keksiminen ja ekvivalenteiksi todistaminen HT[2].

*Huomautus* 3. ”$\heartsuit$” ei ole ekvivalenssirelaatio.

*Todistus.* Todistukseksi riittäisi joko refleksiivisyyden, symmetrisyyden tai transitiivisuuden puutteen toteaminen, mutta teemme ne kaikki korostaaksemme sitä, kuinka hankalasta relaatiosta on kyse.

”$\heartsuit$” ei ole refleksiivinen:
Selvästi ”$a \not\heartsuit a$” jollakin itsetuhoisella $a \in I$.

”$\heartsuit$” ei ole symmetrinen:
Ehdosta $a \heartsuit b$ ei välttämättä seuraa $b \heartsuit a$. Mieti.

”$\heartsuit$” ei ole transitiivinen:
Ehdoista $a \heartsuit b$ ja $b \heartsuit c$ ei seuraa $a \heartsuit c$, sillä jos näin olisi, olisimme miltei kaikki biseksuaaleja. $\square$

*Huomautus* 4. Transitiivisuuden puutteesta seuraa myös se, ettei relaatio ”$\heartsuit$” ole järjestys.

Toimiakseen käytännössä kunnolla relaatio ”$\heartsuit$” vaatisi ainakin symmetrisyyden ja transitiivisuuden. Refleksiivisyys ei ole välttämätön, mutta varsin suotava ominaisuus. Kuitenkin, kuten yleensä matematiikassa, voimme unohtaa käytännön ja tutkia joukkojen jaottelua relaation avulla. Huomaamme pian, että symmetriivisyyden puute mahdollistaa hyvin erilaisia joukkoja.

## 2. Sisäänpäinlämpiävät joukot

Aloitetaan joukkojen tutkiminen tarkastelemalla sisäänpäinlämpiäviä joukkoja. Tällöin voidaan rajoittua tutkimaan joukkoja joiden koko on suurempi kuin kaksi[3]. Määritelmien yksinkertaistamiseksi oletetaan, ettei kukaan rakasta itseään. Toisin sanoen, oletetaan piilossa, että jokainen rakastaa itseään, jolloin se voidaan jättää erikseen merkitsemättä.

**Sopimus 5.** Oletetaan jatkossa, että $A \subset I$ ja $\#A \geq 3$, ellei toisin mainita. Lisäksi oletetaan, että kaikille $a \in A$ pätee $a \not\heartsuit a$.

Jos tämän kappaleen merkinnät vaikuttavat monimutkaisilta, lue kappale 3 ja vilkaise sitten uudestaan. Kuvien piirtäminen auttaa usein. Matematiikassa on kyse kuitenkin vain monimutkaisten asioiden merkitsemisestä yksinkertaisilla merkinnöillä, joiden ymmärtämiseen vaaditaan kuitenkin usean vuoden opiskelu.

[2]Vihje: Neuvoa voi hakea vaikka rock-lyriikoista tai keskioluesta.

[3]Joukot, joiden koko on joko kaksi tai yksi jätämme (parisuhde)terapeuteille.

**Määritelmä 6.** Sanotaan, että joukko $A$ on

(1) *sisäänpäinlämpiävä*, jos joukolle
$$B = \{b \in I : \exists a \in A \text{ s.e. } a \neq b \text{ ja } a \heartsuit b\}$$
pätee $A \cap B \neq \emptyset$.

(2) *vahvasti sisäänpäinlämpiävä*, jos joukko
$$B = \{b \in I : \exists a \in A \text{ s.e. } a \neq b \text{ ja } a \heartsuit b\}$$
on joukon $A$ epätyhjä osajoukko.

(3) *ynnä* (adjektiivina), jos kaikille $a \in A$ on olemassa $b \in A$ siten, että $a \heartsuit b$ ja $a \neq b$ ja lisäksi joukko
$$B = \{b \in I : \exists a \in A \text{ s.e. } a \neq b \text{ ja } a \heartsuit b\}$$
on joukon $A$ osajoukko.

(4) *hippikommuuni*, jos kaikille $a, b \in A$, $a \neq b$, pätee $a \heartsuit b$.

*Huomautus* 7. Ynnä joukko on vahvasti sisäänpäinlämpiävä. Vastaavasti vahvasti sisäänpäinlämpiävä joukko on sisäänpäinlämpiävä.

## 3. Peruskäsitteet

Edellisen kohdan määritelmät vaikuttavat kieltämättä hieman monimutkaisilta. Tätä varten kehitämme hieman käsitteistöä:

**Sopimus 8.** Oletetaan lisäksi jatkossa että $a, b \in A$ ja $a \neq b$, ellei muuta mainita.

**Määritelmä 9.** Sanotaan, että $a$ on

(1) *kylmä joukossa* $A$, jos ei ole olemassa yhtään $b \in A$ siten, että $a \heartsuit b$.
(2) *yksinäinen joukossa* $A$, jos ei ole olemassa yhtään $b \in A$ siten, että $b \heartsuit a$.
(3) *suosittu joukossa* $A$, jos on olemassa $b \in A$ siten, että $b \heartsuit a$.
(4) *lämmin joukossa* $A$, jos on olemassa $b \in A$ siten, että $a \heartsuit b$.
(5) *erakko joukossa* $A$, jos se on kylmä ja yksinäinen joukossa $A$.
(6) *pelimies joukossa* $A$, jos se on suosittu ja lämmin joukossa $A$.
(7) *lortto joukossa* $A$, jos on olemassa $b, c \in A$ siten, että $b \neq c$ ja pätee $a \heartsuit b$ sekä $a \heartsuit c$.
(8) *hippi* joukossa $A$, jos $a \heartsuit b$ kaikilla $b \in A$.
(9) *lojaali joukossa* $A$, jos on olemassa täsmälleen yksi $b \in A$, siten, että $a \heartsuit b$. Tällöin sanotaan, että $a$ on lojaali $b$:lle.
(10) *b:n pari joukossa* $A$, jos $a \heartsuit b$ ja $b \heartsuit a$. Tällöin sanotaan, että $(a, b)$ on pari ja $A$ sisältää parin. Pari $(a, b)$ on vahva pari joukossa $A$, jos $a$ on lojaali $b$:lle joukossa $A$ ja $b$ on lojaali $a$:lle joukossa $A$.

*Huomautus* 10. Jokainen hippi on lortto.

Näitä määritelmiä käyttäen voidaan edelliset käsitteet kirjoittaa uudestaan:

**Lause 11.** *Joukko $A$ on*

*(1) sisäänpäinlämpiävä, jos on olemassa ainakin yksi $a \in A$ siten, että $a$ on lämmin joukossa $A$.*
*(2) vahvasti sisäänpäinlämpiävä, jos kaikki $a \in A$ ovat kylmiä joukossa $I \setminus A$ ja on olemassa vähintään yksi $a \in A$ siten, että $a$ on lämmin joukossa $A$.*

(3) *ynnä, jos kaikki $a \in A$ ovat lämpimiä joukossa $A$ ja kylmiä joukossa $I \setminus A$.*
(4) *hippikommuuni, jos $(a, b)$ on pari joukossa $A$ kaikilla $a, b \in A$.*

*Todistus.* HT. □

**Lause 12.** *Olkoon $A$ ynnä. Tällöin jokin $b \in A$ on pelimies joukossa $A$.*

*Todistus.* Koska oletuksen nojalla jokainen $a \in A$ on lämmin joukossa $A$, on oltava $b \in A$ siten, että $a \heartsuit b$. Edelleen oletuksen nojalla on olemassa $c \in A$ siten, että $b \heartsuit c$. Tällöin $b$ on sekä lämmin, että suosittu joukossa $A$ ja siten pelimies joukossa $A$. □

Todistuksesta huomataan, että vahvemman tuloksen todistaminen on helppoa.

**Lause 13.** *Olkoon $A$ ynnä. Tällöin joukossa $A$ on ainakin kaksi pelimiestä.*

*Todistus.* HT[4]. □

*Huomautus* 14. Tästä vahvempaa tulosta ei voida johtaa. Todistus HT: Konstruoi kaikilla $n \geq 3$ joukko $A$ siten, että $\#A = n$ ja $A$ on ynnä, mutta ei sisällä yli kahta pelimiestä.

## 4. Kolmiodraamat

**Määritelmä 15.** Sanotaan, että $a, b \in A$ ovat *kilpailijoita*, jos on $c \in A$ siten, $a \heartsuit c$ ja $b \heartsuit c$. Tällöin sanotaan, että joukko $A$ *sisältää kilpailua.*

**Määritelmä 16.** Olkoon $\#A = 3$. Sanotaan, että joukko $A$ on

(1) *kolmiodraama*, jos jokainen $a \in A$ on lämmin joukossa $A$.
(2) *vahva kolmiodraama*, jos jokainen $a \in A$ on lämmin joukossa $A$ ja $A$ sisältää yhden parin.
(3) *erittäin vahva kolmiodraama*, jos $A$ sisältää kaksi paria.

Olkoon $\#A \geq 3$. Sanotaan, että joukko $A$

(1) *sisältää kolmiodraaman*, jos on olemassa joukko $B \subset A$ siten, että $B$ on kolmiodraama.
(2) *sisältää vahvan kolmiodraaman*, jos on olemassa joukko $B \subset A$ siten, että $B$ on vahva kolmiodraama.
(3) *sisältää erittäin vahvan kolmiodraaman*, jos on olemassa joukko $B \subset A$ siten, että $B$ on erittäin vahva kolmiodraama.

*Huomautus* 17. Kolmiodraama ei välttämättä sisällä kilpailua. Sen sijaan vahva ja erittäin vahva kolmiodraama sisältävät aina kilpailua.

**Lause 18.** *Hippikommuuni sisältää kolmiodraaman, vahvan kolmiodraaman ja erittäin vahvan kolmiodraaman.*

*Todistus.* Riittää osoittaa, että hippikommuuni sisältää erittäin vahvan kolmiodraaman. Muut väitteet seuraavat määritelmistä.
Olkoon $A \subset I$ hippikommuuni siten, että $\#A \geq 3$. Tällöin voidaan valita $B := \{a, b, c\} \in A$. Koska lauseen 11 nojalla $(a, b)$ ja $(b, c)$ ovat pari, on $B$ erittäin vahva kolmiodraama ja tällöin $A$ sisältää erittäin vahvan kolmiodraaman. □

[4]Vinkki: Jatka edellisen todistuksen ideaa.

## 5. Avoimet ja suljetut joukot

**Määritelmä 19.** Sanotaan, että joukko $A$ on

(1) *avoin*, jos on olemassa $a \in A$, joka on on lämmin joukossa $I \setminus A$.
(2) *vahvasti avoin*, jos on $a \in A$, joka on kylmä joukossa $A$ ja lämmin joukossa $I \setminus A$.
(3) *suljettu*, jos jokainen $a \in A$ on kylmä joukossa $I \setminus A$.
(4) *vahvasti suljettu*, jos jokainen $a \in A$ on lämmin joukossa $A$ ja kylmä joukossa $I \setminus A$.

*Huomautus* 20. Joukko ei voi olla yhtä aikaa sekä (vahvasti) avoin että (vahvasti) suljettu.

**Lause 21.** *Joukko on ynnä jos ja vain jos se on vahvasti suljettu.*

*Todistus.* Seuraa suoraan lauseesta 11. □

**Määritelmä 22.** Sanotaan, että joukko $A$ on

(1) *eduskunta*, jos jokainen $a \in A$ on suosittu joukossa $I \setminus A$.
(2) *isolaatio*, jos jokainen $a \in A$ on erakko joukossa $I \setminus A$.

## 6. Terveet ja kierot joukot

**Määritelmä 23.** Sanotaan että joukko $A$ on

(1) *terve*, jos se on suljettu ja sisältää vain erakkoja tai vahvoja pareja.
(2) *vino*, jos se on vahvasti suljettu, mutta ei sisällä yhtään paria.
(3) *kiero*, jos se sisältää pareja, mutta ei yhtään vahvaa paria.

**Esimerkki 24.** Erittäin vahva kolmiodraama on kiero joukko.

**Lause 25.** *Terve joukko ei sisällä lorttoja.*

*Todistus.* Olkoon $A$ terve joukko siten, että $\#A \geq 3$.
Tehdään antiteesi: $A$ sisältää lorton $l$.
Tällöin $l$ ei ole erakko, joten on oltava vahva pari $(l, a)$ joukossa $A$. Koska $l$ on lortto, on olemassa $b \neq a$ siten, että $l \heartsuit b$. Tällöin $l$ ei ole lojaali $a$:lle, joten pari $(l, a)$ ei ole vahva pari. Tämä on ristiriita. Koska antiteesi johtaa ristiriitaan, on alkuperäinen väite tosi. □

*Huomautus* 26. Terve joukko ei myöskään sisällä hippejä.

**Lause 27.** *Kiero joukko sisältää lorton.*

*Todistus.* Koska kiero joukko sisältää pareja, on olemassa ainakin yksi pari $(a, b)$. Koska pari ei ole vahva, on olemassa $c$, siten, että (mahdollisesti merkintöjä vaihtamalla) $a \heartsuit c$ ja $c \neq b$. Tällöin $a$ on lortto. □

### 6.1. Erittäin terveet ja kierot joukot.

Kirjallisuudessa esiintyy muutamia erikoisempia joukkoja, joihin emme tämän tutkielman puitteissa tutustu tarkemmin. Esittelemme tässä niistä muutaman. Asiasta kiinnostuneet voivat tutustua viitteistä löytyvään materiaaliin.

**Määritelmä 28.** Sanotaan, että joukko $A$ on

(1) *munkkiluostari*, jos jokainen $a \in A$ on erakko. Katso [6].
(2) *kristillisesti terve*, jos se sisältää vain vahvoja heteropareja. Katso [7].
(3) *pyhäjärvi* (adjektiivina), jos $A$ on vahvasti suljettu ja $a \heartsuit b \Rightarrow a$ ja $b$ ovat serkkuja. Katso [4].
(4) *erittäin kiero*, jos jokainen $a \in A$ on lämmin joukossa $I^c$. Katso [2].
(5) *vino kunta*, jos se on pyhäjärvi ja ei sisällä yhtään paria. Katso [3].

## 7. Yhteys verkkoteoriaan

Erilaisten joukkojen hahmottaminen helpottuu, kun joukon alkioiden väliset suhteet esitetään verkkoina. Kutsutaan joukkojen alkioita verkkojen kärjiksi ja sanotaan, että verkon kärkien $a$ ja $b$ välillä kulkee reuna, jos $a \heartsuit b$. Koska relaatio "$\heartsuit$" ei ole symmetrinen, tulee verkoista suunnattuja. Näin joukon alkiot voidaan piirtää pisteinä ja reunat nuolina. Tällöin tilanteessa $a \heartsuit b$ piirretään nuoli osoittamaan kärjestä $a$ kärkeen $b$. Kuvassa 1 on esitetty yksinkertainen tilanne, jossa $a$ rakastaa $b$:tä ja kuvassa 2 on esitetty luvun 3 määritelmiä ja muutamia monimutkaisempia tilanteita.

**Sopimus 29.** Kutsutaan relaation $\heartsuit$ avulla muodostettuja verkkoja jatkossa yksinkertaisesti (rakkaus)verkoiksi.


Kuva 1. *a* rakastaa *b*:tä

**Määritelmä 30.** Olkoon $G$ rakkausverkko ja $a \in G$ sen kärki. Märitellään kärjelle $a$ joukossa $G$

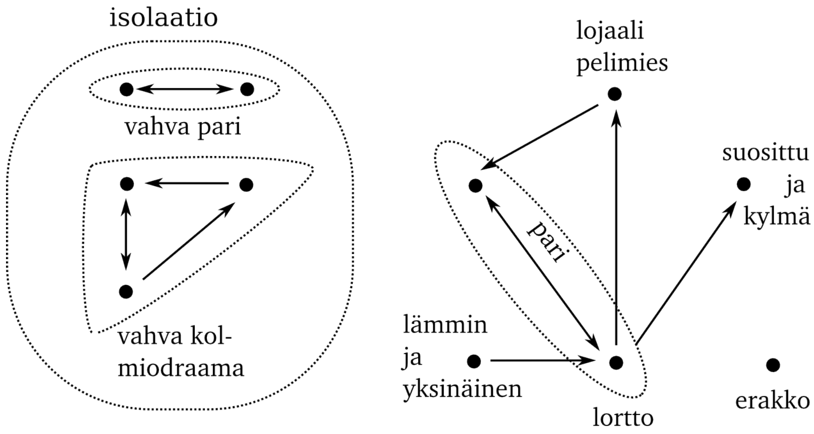
(1) *panetus* $p(a)$ asettamalla
$$p(a) := \#\{b \in G \ : \ a \heartsuit b\},$$
(2) *saanti* $s(a)$ asettamalla
$$s(a) := \#\{b \in G \ : \ b \heartsuit a\}$$
ja lopuksi
(3) *aste* $d(a)$ asettamalla
$$d(a) = s(a) - p(a).$$

*Huomautus* 31. Koska verkot ovat suunnattuja, poikkeaa asteen määritelmä yleensä kirjallisuudessa esiintyvästä määritelmästä.

**Esimerkki 32.** Huomataan, että

(1) lortolle $a$ pätee $p(a) \geq 2$,
(2) pelimiehelle $b$ pätee $s(b) \geq 1$ sekä $p(b) \geq 1$ ja
(3) erakolle $e$ pätee $s(e) = p(e) = d(e) = 0$.

**Lause 33.** *Olkoon $G$ rakkausverkko. Tällöin*
$$\sum_{a \in G} d(a) = 0.$$




KUVA 2. Rakkausverkkoja

*Todistus.* HT (Koska kirjoittaja totesi todistuksen tekemisen yllättävän vaikeaksi ja laiskuus iski.)
Vinkki: Huomaa ensin, että

$$\sum_{a\in G} d(a) = \sum_{a\in G} s(a) - p(a) = \sum_{a\in G} s(a) - \sum_{a\in G} p(a),$$

mistä määritelmien nojalla saadaan

$$\sum_{a\in G} d(a) = \sum_{a\in G} \#\{b \in G \ : \ b\heartsuit a\} - \sum_{a\in G} \#\{b \in G \ : \ a\heartsuit b\}.$$

Tämän jälkeen unohda edellinen, esitä verkko matriisina ja laske sen alkioiden summa. □

## 8. VERKKOJEN VÄRITYKSET, SUKUPUOLET JA HETEROUS

Useissa tapauksissa on havainnollistamisen vuoksi mielekästä värittää verkkojen kärjet eri väreillä, siten että ”naapurit” ovat aina keskenään eri värisiä. Koska sininen on poikien väri ja punainen tyttöjen, halutaan verkot värittää vain kahdella värillä.

**Määritelmä 34.** Kärki $b$ on kärjen $a$ *naapuri*, jos $a\heartsuit b$.

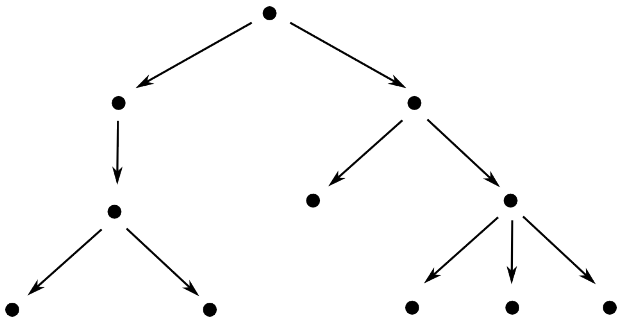
**Määritelmä 35.** Kärki $a \in G$ on *hetero*, jos kaikki sen naapurit ovat sen kanssa eri sukupuolta. Edelleen pari $(a, b)$ on heteropari, jos $a$ ja $b$ ovat eri sukupuolta.

**Määritelmä 36.** Sanotaan, että verkko $G$ on *sateenkaari*, jos se sisältää kärjen, joka ei ole hetero.

*Huomautus* 37. Nimi sateenkaari tulee siitä, että verkkoa, joka on sateenkaari, ei ole mahdollista värittää sukupuolen mukaan kahdella värillä siten, että naapurit ovat aina erivärisiä.

**Määritelmä 38.** Verkon $G$ *polku* ($a_1$:stä $a_n$:nään) on järjestetty joukko $\{a_1, \dots, a_n\}$, jonka alkioille pätee $a_i\heartsuit a_{i+1}$ tai $a_{i+1}\heartsuit a_i$ kaikilla $i = 1, 2, \dots, n-1$. Sanotaan, että polku on *sykli*, jos $a_1 = a_n$. Tällöin sanotaan, että polun/syklin *pituus* on $n$.

**Lause 39.** *Jos verkko sisältää syklin, jonka pituus on pariton, se sisältää kärjen, joka ei ole hetero.*



KUVA 3. Yksinkertainen sukupuu

*Todistus.* Todistus HT. Todistuksen tekemisestä kiinnostuneet voivat tutustua lähteisiin [1] ja [5]. □

## 9. Puut, suvut ja sukurutsaus

Ihmisten välisiä sukulaissuhteita on totuttu esittämään sukupuina. Sukupuu on esimerkki verkosta, jossa jokaisesta kärjestä on polku toisiin kärkiin. Sukupuiden tutkimista varten tarvitsemme toisen relaation.

**Määritelmä 40.** Olkoon $S$ sukulaisten joukko ja $a, b \in S$. Määritellään relaatio "†":

$$a \dagger b \Leftrightarrow \text{ a on b:n vanhempi}$$

*Huomautus* 41. i) Ihmisen vanhemmiksi ei lasketa hänen isovanhempiaan jne.
ii) Relaatio "†" ei ole refleksiivinen, symmetrinen eikä transitiivinen.
iii) Määritelmässä esiintyvä sukulaisten joukko $S$ määritellään ihmisten joukosta sukulaisuusrelaation avulla. HT: Määrittele relaatio "$a$ on $b$:n sukulainen".

Muodostetaan sukulaisista verkko relaation † avulla samalla tavalla kuin teimme rakkausrelaation kanssa. Tälläkin kertaa verkosta tulee suunnattu, mutta tavallaan hierarkinen, koska ei ole mahdollista muodostua pareja kuten rakkausrelaation kanssa.[5] Kuvassa 3 on esitetty melko yksinkertainen sukupuu.

Sukupuiden polut ja syklit määritellään samalla tavalla kuin rakkausrelaation tapauksessa. Huomattavaa on, että polun muodostaminen on tässäkin tapauksessa suuntauksen suhteen neutraali: polku voi kulkea isältä pojalle ja päinvastoin.

**Määritelmä 42.** Sukupuu $G$ *sisältää sukurutsausta*, jos on olemassa kärjet $a, b \in G$, siten, että $a \heartsuit b$.

**Määritelmä 43.** Olkoon $G$ sukupuu, joka sisältää sukurutsausta ja kärjet $a, b \in G$ siten, että $a \heartsuit b$. *Sukurutsauksen taso* määritellään seuraavasti:

$$L(a, b) = \min\{n : \{a = a_0, \ldots, a_n = b\} \text{ on polku}\}.$$

**Esimerkki 44.** Sisaruksille $L(a, b) = 2$, serkuksille $L(a, b) = 4$, miehelle ja hänen tädilleen $L(a, b) = 3$.

*Huomautus* 45. Suomen lainsäädäntö sallii jo tason 4 tapauksen.

[5] Poikkeuksena Kauniit ja Rohkeat!

## Viitteet

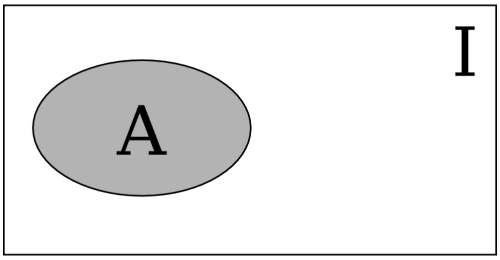

[1] Ian Anderson *A First Course in Discrete Mathematics*. Springer-Verlag London Limited, 2001.
[2] P. Ervo *Viikkoni Japanissa*. Sensuurin takia poistettu blogimerkintä, 2009.
[3] Kari K. Kario *Läheisyys sukulaissuhteissa*. Humanistista liibalaabaa justjoo, 2008.
[4] J. Kuula *Lapsuuteni Pyhäjärvellä*. Sivulause, 2010.
[5] Jiří Matoušek & Jaroslav Nešetřil *Invitation to discrete mathematics*. Department of Applied Mathematics, Charles University, Praha, 1998.
[6] J. Pietarinen *Metallimusiikista, keskioluesta ja rakkaudesta*. Facebook-keskustelu, 2010.
[7] P. Räsänen *Homoilta*. YLE, 2010.

## Liite A. Matemaattisia merkintöjä

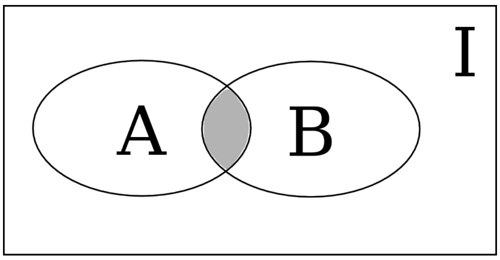
- $a \in A$: $a$ kuuluu joukkoon $A$.
- $a, b \in A$: $a$ ja $b$ kuuluvat joukkoon $A$.
- $\{a \in A : \ ehto\}$: ne alkiot joukossa $A$, joille *ehto* pätee.
- $\#A$: joukon $A$ alkoiden lukumäärä.
- s.e.: siten, että
- $A \Leftrightarrow B$: "$A$ ja $B$ ovat yhtäpitäviä".
- HT: harjoitustehtävä.
- $\exists$: on olemassa.
- $\emptyset$: joukko joka on tyhjä.
- $A \subset I$: $A$ on joukon $I$ osajoukko. Katso kuva 4 liitteessä B.
- $A \cap B$: joukkojen $A$ ja $B$ yhteiset alkiot. Katso kuva 5 liitteessä B.
- $I \setminus A$: Joukon $A$ (relatiivinen) komplementti, eli ne joukon $I$ alkiot, jotka eivät kuulu joukkoon $A$. Katso kuva 6 liitteessä B.
- $A \Rightarrow B$: "$A$:sta seuraa $B$".

## Liite B. Venn-diagrammeja

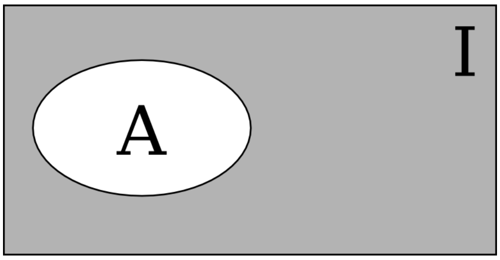
Joukkojen, niiden leikkausten ja komplementtien havainnoillistaminen on helppoa Venn-diagrammeilla. Kuvattu joukko on kuvissa harmaana.




Kuva 4. $A$ on joukon $I$ osajoukko, $A \subset I$




Kuva 5. Joukkojen $A$ ja $B$ leikkaus, $A \cap B$




Kuva 6. Joukon $A$ komplementti, $I \setminus A$